Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Tesis Doctoral

Contribución al estudio y clasificación de las funciones de implicación borrosas

Autor: Cristina del Campo Campos

Director: Dr. Enric Trillas Ruiz

Madrid, octubre de 2002

Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Tesis Doctoral

Contribución al estudio y clasificación de las funciones de implicación borrosas

Autor: Cristina del Campo Campos
Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Santiago
Director: Dr. Enric Trillas Ruiz
Doctor en Ciencias por la Universidad de Barcelona

Madrid, octubre de 2002

A Andrés padre,
in memoriam

Agradecimientos

A Carlos y Merce, mis padres,
porque sin ellos esta aventura nunca hubiese sido posible.

A Andrés padre y Mari,
por sus mimos y mucho más.

A Mari Carmen,
por su cariño.

A Laurita,
por estar ahí.

A Aurora y Ramón, Eva y Ángel, Laura y Jose, María, Viruca y Rocío,
por soportarme.

A Astorga,
ciudad sin ley.

A Antonio y Raquel,
por su amistad.

A mis compañeros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa II
(Métodos de Decisión) de la Universidad Complutense de Madrid,
por preocuparse.

A Enric,
por la paciencia.

A Andrés,
porque como pared no tiene precio.

Resumen

La tesis doctoral "Contribución al estudio y clasificación de las funciones de implicación borrosas" constituye a la vez una revisión y un conjunto de aportaciones a la modelización de enunciados condicionales, o enunciados del tipo "Si P, entonces Q".

Dentro del marco de la lógica borrosa, tradicionalmente, se considera que la mayor parte de las funciones de implicación, que modelizan los enunciados condicionales, deberían generalizar la implicación material booleana. En esta memoria se apoya el argumento de que la implicación material booleana no es siempre el modelo más adecuado para la modelización de los enunciados condicionales, por lo que se definen y estudian clases o grupos de funciones de implicación que se adecúen a las necesidades de cada caso de aplicación.

Así pues, tras un capítulo introductorio, en el capítulo 2 se plantean clases de funciones de implicación que sirvan de apoyo en la definición de aplicaciones de carácter borroso más allá de las funciones de implicación borrosas derivadas de la implicación material booleana. Así se llega a la conclusión de que son necesarios, por lo menos, cuatro clases de funciones de implicación de las que se estudian sus propiedades.

En el tercer capítulo se aborda el estudio de la verificación tanto de la regla del Modus Ponens como de la regla del Modus Tollens por parte de las funciones de implicación pertenecientes a cada una de las clases planteadas.

Por último, en el capítulo 4 se presenta un estudio de los operadores citados como implicaciones borrosas en la literatura bajo el enfoque presentado en esta memoria, ampliándose estudios realizados por otros autores.

Abstract

The Ph.D. Thesis “Contribución al estudio y clasificación de las funciones de implicación borrosas” is a revision and a set of contributions to the conditional statements or statements of the type “If P then Q” modelization.

It has been usually considered in Fuzzy Logic, that implication functions that model conditional statements should generalize the boolean material implication. The present memory supports the argument that boolean material implication is not always the most appropiated model for conditional statements, so implication function groups or clusters are defined in order to fit in each application.

Therefore, after an introductory chapter, in chapter 2 groups or clusters of implication functions are given in order to bear out fuzzy applications definitions further on from implication functions coming from boolean material implication. Then, it has been reached the conclusion that, at least, four types of implication functions are needed so their properties are studied.

In the third chapter verification of both Modus Ponens and Modus Tollens rules is studied for each of the implication function groups.

Finally it is presented a study of many operators cited as fuzzy implication in the literature under the vision presented in this monography, expanding previous studies.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años la Inteligencia Artificial, rama de la informática que investiga las técnicas que intentan asemejar el comportamiento de los ordenadores al de los humanos, se ha desarrollado de tal forma que se posee ahora un arsenal de técnicas para crear programas que controlen procesos de fabricación, diagnostiquen enfermedades humanas, diseñen ordenadores, jueguen al ajedrez como un gran maestro, etc. Para ello es fundamental la representación del conocimiento y en concreto la representación del conocimiento reglado.

Entre ellos los sistemas expertos han demostrado ser de gran utilidad, como lo demuestran las numerosas aplicaciones comerciales que, basadas en ellos, se pueden encontrar en el mercado.

Un sistema experto [32], tal y como su propio nombre sugiere, es un sistema que capta y que estructura el conocimiento propio de un experto en alguna materia concreta. Con dicho conocimiento el programa es capaz de inferir nuevo conocimiento, dentro de un determinado dominio y mediante un proceso que emula el proceso de razonamiento del experto.

Los sistemas expertos se construyen fundamentalmente con el propósito de hacer que los conocimientos que proporciona la experiencia de tanto el acercamiento como la capacidad de resolver problemas que tiene el experto en una determinada área sean accesibles bien a otro experto, bien a un no experto en el área en cuestión. Además, los sistemas expertos deben diseñarse para varias tareas específicas como consulta, diagnosis, aprendizaje, ayuda a la decisión, diseño, planificación o búsqueda, entre otras.

Dentro de un sistema experto borroso una parte de vital importancia es el motor de inferencia. Éste, en un sistema experto borroso, opera sobre una serie de reglas de producción y realiza inferencia borrosa. Existen dos maneras fundamentales para evaluar reglas de producción. La primera de ellas es "data-driven" y un ejemplo es el Modus Ponens Generalizado. En ese caso, los datos se facilitan al sistema experto que los usa para evaluar las reglas de producción relevantes y para extraer todas las posibles conclusiones. Un método alternativo de evaluación es el llamado dirigido por objetivos. Un sencillo ejemplo es el Modus Tollens Generalizado. Con él, el sistema experto busca los datos especificados en los condicionantes de las reglas "Si ... entonces ..." de producción. Dichos datos se encontrarán bien en la base de conocimiento, bien en las cláusulas "entonces..." de otras reglas o bien preguntando al usuario. Teniendo en cuenta que el método "data-driven" procede de las cláusulas "Si..." a las cláusulas "entonces..." en la cadena de razonamiento, se le conoce por el nombre de *encadenamiento hacia delante.* De forma similar al método anterior, como la búsqueda de los datos necesarios va desde las cláusulas "entonces..." a las cláusulas "si...", se le conoce con el nombre de *encadenamiento hacia atrás.*

El propósito fundamental de esta memoria es estudiar los modelos teóricos de las reglas de producción borrosas, es decir, una parte de lo que tradicionalmente se conoce con el nombre de razonamiento aproximado. Este material es esencial para el diseño de los motores de inferencia de los sistemas expertos borrosos. Evidentemente el diseño concreto de dichos sistemas expertos o de los motores de inferencia está fuera del propósito de esta tesis.

Uno de los problemas fundamentales con los que se encuentra la Lógica Borrosa es, precisamente, el tratamiento de la inferencia con predicados vagos, es decir, la inclusión en el cuerpo de sus teorías de un modelo para el significado de las frases del tipo *"Si a esP entonces b es Q"* donde P y Q son predicados vagos o imprecisos. Con este fin, desde los pioneros trabajos de la década de los 80 de Bandler y Kohout [3], Trillas y Valverde [45] o Cao y Kandel [8], diversos autores han definido y estudiado operadores, provenientes en su mayoría de la lógica bivaluada o multivaluada, que pretenden representar adecuadamente este hecho. Ahora bien, como ya se sabe, en lógica booleana una función $\rightarrow$ es una implicación si $x \rightarrow y \leq x' + y$ y a partir de la generalización natural de las propiedades de la implicación material booleana $x' + y$ se ha establecido la definición de función de implicación en lógica Borrosa (ver [1]).

Se ha considerado, sin embargo, que la generalización de las implicaciones booleanas dada por las funciones de implicación y comúnmente aceptada, no está completa. Éste es el fin primordial de esta tesis: ampliar el concepto de función de implicación. Este concepto se expresa a través de una función de dos variables puesto que permite combinar el valor de verdad de *"a es P"* e *"b es Q"* para propagar esa información a un sólo valor.

La tesis se estructura de la siguiente forma:

Capítulo 2: Definiciones previas.

Capítulo 3: Funciones de implicación.

Capítulo 4: Operadores de implicación y T-condicionales.

Capítulo 5: Estudio de operadores de implicación.

Capítulo 6: Comentarios finales.

Con el propósito de que esta tesis sea autocontenida, la memoria comienza con una serie de definiciones y propiedades básicas relativas a t-normas, t-conormas y funciones de negación que serán necesarios para el desarrollo posterior. Muchos de los conceptos que se recuerdan en este capítulo son ampliamente conocidos, pero dada la importancia y el uso reiterado que se hace de ellos a lo largo de la tesis se ha considerado obligada su introducción. En relación a las funciones de negación, se presentan algunos resultados que completan trabajos anteriores de diversos autores.

Al considerar la generalización de la implicación booleana la comunidad fuzzy se ha centrado de manera casi exclusiva en la generalización de la implicación material dejando un poco de lado las otras posibilidades. El tercer capítulo se dedica al análisis de las posibles generalizaciones del concepto de implicación clásica y a la definición, de manera análoga al caso de la implicación material, de los distintos modelos así como al estudio de algunas de sus respectivas propiedades.

El capítulo cuarto se dedica al estudio de la relación existente entre el concepto de condicionalidad, tanto respecto al Modus Ponens como al Modus Tollens y a ambos de forma conjunta, y los nuevos modelos de funciones de implicación, conceptos que, si bien son equivalentes en la Lógica Booleana, no sucede así en la Lógica Borrosa.

En el capítulo quinto se hace un estudio detallado de todos aquellos operadores llamados implicaciones en la literatura. Lo que se pretende es proporcionar una relación de estos operadores, no siempre bien llamados implicaciones, presentando una clasificación de las más usuales.

Por último, la memoria finaliza con un capítulo dedicado a las conclusiones que se derivan de la presente memoria y en el que se citan algunos de los problemas que no han quedado cerrados y que pueden dar pie a futuros trabajos de investigación.

Capítulo 2

Definiciones previas

2.1 Introducción

Clásicamente, dado un universo de discurso E compuesto de elementos, se entiende por conjunto una agrupación de los mismos caracterizada por una propiedad común a todos ellos o bien definida por extensión, es decir, por enumeración de los elementos del mismo. El conjunto A cuyos elementos verifican la propiedad P se indica por

$$A = \{x \in E : P(x)\}$$

y se lee: *A es el conjunto formado por los elementos x, tales que P(x).* $P(x)$ es una función proposicional y, por tanto, un objeto del universo pertenece al conjunto si y sólo si verifica la propiedad, es decir

$$a \in A \Longleftrightarrow P(a) \text{ es } V$$

En consecuencia $a \notin A \Longleftrightarrow P(a)$ es F, esto es, un objeto del universo no pertenece al conjunto si y sólo si no verifica la propiedad.

Dado el conjunto A de E la función de variable real $\varphi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ que asigna el valor 1 a todos los elementos del conjunto y 0 al resto, es decir definida por

$$\varphi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } \ x \in E - A \end{array} \right\}$$

recibe el nombre de función característica. Algunos ejemplos de estas funciones son $\varphi_E = 1$ y $\varphi_\emptyset = 0$. El conjunto A es matemáticamente equivalente a la función $\varphi_A(x)$, es decir, conocer la función característica es lo mismo que conocer el propio conjunto. Las propiedades fundamentales que esta función verifica son las siguientes

1. $A \subset B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$.
2. $\varphi_{A\cap B}(x) = Min\left(\varphi_A(x), \varphi_B(x)\right)$.
3. $\varphi_{A\cup B}(x) = Max\left(\varphi_A(x), \varphi_B(x)\right)$.
4. $\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

Además es $\mathbb{P}(E) = \{0,1\}^E$.

La teoría clásica de conjuntos, cuyas bases han sido reflejadas en lo anterior, exige la pertenencia total de cualquier elemento a un conjunto o a su complementario. Sin embargo esta teoría no es adecuada para representar muchos de los predicados del lenguaje natural, ya que la información lingüística es normalmente muy difícil de representar utilizando las matemáticas tradicionales. Por ejemplo el predicado *grande* no es representable mediante un conjunto clásico, puesto que si como universo del discurso se toman los números del 1 al 100, claramente el 100 debe estar incluido dentro de los números grandes. Entre 99 y 100 sólo hay uno de diferencia, por lo que si

100 es grande 99 también. Entre 99 y 98 sólo hay uno de diferencia, por lo que si 99 es grande 98 también. Y así sucesivamente. Llegaríamos entonces a la paradoja de que 1 es grande, lo que evidentemente no sucede.

Así pues, el mayor problema con el que se encuentra la modelización de los predicados del lenguaje natural es la representación de aquellos predicados que se podrían denominar vagos, como pueden ser *grande*, *pequeño*, *poco*, *mucho*, etc.

En 1965 Lotfi Zadeh [52] publicó un artículo que se considera como el origen de la Lógica Borrosa. En dicho artículo redefinió la pertenencia de un elemento a un conjunto eliminando la exigencia de carácter discreto y permitiendo, con la nueva definición, tantos grados de pertenencia como puntos tiene el intervalo $[0,1]$, puesto que como él mismo dice "*The closer one looks at a real-world problem, the fuzziest becomes its solution*"[1].

2.2 Conjuntos borrosos

Dado un conjunto E, un *fuzzy set* o conjunto borroso A en E se caracteriza por una función de pertenencia que asigna a cada punto x del conjunto E un valor real $\mu_A(x)$ en el intervalo $[0,1]$ representando el grado de pertenencia de ese elemento al conjunto borroso A. Por tanto, cuanto más cerca de la unidad esté $\mu_A(x)$ mayor será el grado de pertenencia del elemento a dicho conjunto A. Nótese que si se considera un conjunto en el sentido clásico de la palabra, su función de pertenencia será la función característica que sólo toma los valores o grados de pertenencia 0 ó 1, según el elemento pertenezca o no al mismo. El conjunto de todas las posibles funciones de pertenencia o conjuntos borrosos en E se denota por $F(E) = [0,1]^E$.

Las operaciones en el conjunto $F(E)$ se definen puntualmente a través

[1] "Cuanto más examinas un problema del mundo real, más borrosa parece su solución"

de sus funciones de pertenencia como extensiones de las correspondientes para conjuntos ordinarios, y si además se quiere mantener la asociatividad de la intersección y de la unión de conjuntos borrosos y el hecho de que φ_E y $\varphi_\emptyset$ sean, respectivamente, los elementos neutros de la intersección y de la unión se llega, de forma natural [2], a la consideración de la unión como una t-conorma y la intersección como una t-norma. Para ambas existe una definición axiomática (ver [33]) que se expone a continuación.

Definición 1 *Una t-norma es una operación binaria en el intervalo unidad* $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *verificando para todo* $x, y, z \in [0,1]$ *los axiomas*

1. *Asociatividad:* $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$.
2. *Conmutatividad:* $T(x,y) = T(y,x)$.
3. *Monotonía: si* $y \leq z \Rightarrow T(x,y) \leq T(x,z)$.
4. *Elemento neutro:* $T(x,1) = x$.

Se debe de hacer notar que de la monotonicidad y de la existencia de elemento neutro se deduce de manera casi inmediata la existencia de elemento absorbente, es decir, que $T(x,0) = T(0,x) = 0$. Además, si la operación considerada es continua la conmutatividad se deduce de las otras condiciones.

Las t-nomas más usuales son: $T = Min$, $T = Prod$ y la t-norma de Łukasiewicz $W = Max(0, Sum - 1)$. Además entre estas t-normas se verifica la relación $W \leq Prod \leq Min$. Es más, ya se sabe que considerada cualquier t-norma T se tiene que $T \leq Min$. Pero también $Z \leq T$, para cualquier t-norma T, donde Z es la t-norma mínima definida por $Z(x,y) = Min(x,y)$ si $Max(x,y) = 1$; $Z(x,y) = 0$ en otro caso.

Se recuerda que una t-norma T_1 pertenece a la familia de t-normas de T ($T_1 \in \mathcal{F}(T)$) si existe una aplicación biyectiva y creciente $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$ tal que $T_1 = \varphi^{-1} \circ T \circ (\varphi \times \varphi)$. Esta aplicación biyectiva φ recibe el nombre de automorfismo de orden. Para simplificar la notación siempre que $T_1 \in \mathcal{F}(T)$, es decir $T_1 = \varphi^{-1} \circ T \circ (\varphi \times \varphi)$, se escribirá $T_1 = T_\varphi$.

El siguiente teorema de representación de t-normas continuas ha tenido diversas versiones, se presenta a continuación la última de ellas [33].

Teorema 2 *Sea T una operación binaria en el intervalo unidad $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ verificando*

1. $T(x,0) = T(0,x) = 0$.
2. $T(1,1) = 1$.
3. *T es asociativa.*
4. *T es continua.*

Entonces T admite una de las siguientes representaciones

a) $T(x,y) = Min(x,y)$;

b) $T(x,y) = \varphi^{-1} \circ Prod \circ (\varphi \times \varphi)$ *donde una aplicación biyectiva* $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *con* $\varphi(0) = 0$ *y* $\varphi(1) = 1$;

c) $T(x,y) = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ *donde una aplicación biyectiva* $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *con* $\varphi(0) = 0$ *y* $\varphi(1) = 1$;

d) *Existe una colección numerable $\{[a_n, b_n]\}$ de subintervalos no degenerados, cerrados y no solapados de $[0,1]$ y una colección de t-normas T_n cada una representable en las formas dadas en los apartados anteriores tal que*

$$T(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} a_n + (b_n - a_n) T_n \left(\dfrac{x - a_n}{b_n - a_n}, \dfrac{y - a_n}{b_n - a_n} \right) & si\ (x,y) \in [a_n, b_n]^2 \ \ para\ algún\ n \\ Min\,(x,y) & en\ otro\ caso \end{array} \right\}$$

La virtud de este teorema es que muestra cómo un gran número de t-normas, en concreto las que son continuas, son bien la t-norma del mínimo, bien pertenece a la familia del producto o de Łukasiewicz o bien son una suma ordinal de t-normas de dichos tipos y en tal caso no es necesario en absoluto exigirle ni la monotonía ni la conmutatividad.

La definición para t-conormas dada en el citado [33] es la siguiente

Definición 3 *Una t-conorma es una operación binaria en el intervalo unidad* $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *verificando para todo* $x, y, z \in [0,1]$ *los axiomas*

1. *Asociatividad:* $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$.
2. *Conmutatividad:* $S(x,y) = S(y,x)$.
3. *Monotonía: si* $x \leq y \Rightarrow S(x,z) \leq S(y,z)$.
4. *Elemento neutro:* $S(x,0) = x$.

Los siguientes ejemplos corresponden a las t-conormas más usuales: $S = Max$, $S = Prod^* = Sum - Prod$ y $W^* = Min\,(1, Sum)$. De manera análoga a las t-normas dadas como ejemplo, estas t-conormas verifican la relación $Max \leq Prod^* \leq W^*$. Se recuerda que si T es una t-norma, T^* denota la t-conorma dual.

Al igual que en el caso de las t-normas existe un teorema de representación para t-conormas totalmente análogo (ver [33]).

Al igual también que para las t-normas, una t-conorma S_1 pertenece a la familia de t-conormas de S ($S_1 \in \mathcal{F}(S)$) si existe una aplicación biyectiva y creciente $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$ tal que $S_1 = \varphi^{-1} \circ S \circ (\varphi \times \varphi)$. Esta aplicación biyectiva y creciente φ recibe el nombre de automorfismo de orden. Para simplificar la notación siempre que $S_1 \in \mathcal{F}(S)$, es decir $S_1 = \varphi^{-1} \circ S \circ (\varphi \times \varphi)$, se escribirá $S_1 = S_\varphi$.

Se trata a continuación el tema del complemento.

2.2.1 Funciones de negación

En el citado artículo de Bellman y Gierz [5] el tema de las funciones $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que definiesen el complemento de un conjunto borroso a través de la expresión $\mu_{A'}(x) = N(\mu_A(x))$ y que verificasen el mayor número posible de las propiedades del complemento clásico quedaba abierto. En su primer trabajo sobre conjuntos borrosos [52], Zadeh adoptó la función $N(x) = 1-x$, al igual que se hace en las lógicas multivaloradas. Pero el citado caso se puede extender y en [34] se consideraba una generalización del complemento basada en la siguiente definición.

Definición 4 *Una función $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es una función de negación si verifica*

1. $N(0) = 1$, $N(1) = 0$.
2. N *es decreciente.*

Además si la función de negación verifica $N(N(x)) \geq x$ se dice que es ordinaria y se dice que es débil si $N(N(x)) \leq x$. En caso de que se verifique $N(N(x)) = x$, es decir, $N^2 = id_{[0,1]}$, se dice que la función de negación es fuerte.

Dada una t-norma con generador aditivo φ se verifica que la función $N_\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por la expresión $N_\varphi = \varphi^{-1} \circ \left(1 - id_{[0,1]}\right) \circ \varphi$ ó

$N_{\varphi}(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$, es una negación fuerte que recibe el nombre de negación generada por φ. Es más, el punto central del citado artículo [34] es el siguiente teorema de caracterización, fundamental desde un punto de vista práctico, puesto que hace que la citada definición del complemento sea operativa.

Teorema 5 *Una función $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es una función de negación fuerte si y sólo si existe una función $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ estrictamente creciente con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$ tal que $N = \varphi^{-1}(1 - \varphi)$.*

Sin embargo en el citado artículo no se estudiaba la estructura del conjunto de las negaciones. A pesar de no ser el objeto fundamental de esta memoria, los siguientes resultados ahondan en dicho tema.

Considérese pues el conjunto $\not{N}$ de todas las negaciones sobre el intervalo $[0,1]$ y sean $n, n' \in \not{N}$, se definen $n \wedge n'$ y $n \vee n'$ de forma puntual, es decir

- $(n \wedge n')(x) = n(x) \wedge n'(x) = Min(n(x), n'(x))$.
- $(n \vee n')(x) = n(x) \vee n'(x) = Max(n(x), n'(x))$.

Lema 6 *Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ están bien definidas en $\not{N}$.*

Demostración. Por un lado se tiene

1. $(n \wedge n')(0) = n(0) \wedge n'(0) = 1 \wedge 1 = 1$.
2. $(n \wedge n')(1) = n(1) \wedge n'(1) = 0 \wedge 0 = 0$.
3. Sean $x_1 \leq x_2$, entonces teniendo en cuenta que tanto n como n' son negaciones se tiene que

   $(n \wedge n')(x_1) = n(x_1) \wedge n'(x_1) \geq n(x_2) \wedge n'(x_2) = (n \wedge n')(x_2)$

   es decir, $(n \wedge n')$ es decreciente.

Pero también

1. $(n \vee n')(0) = n(0) \vee n'(0) = 1 \vee 1 = 1.$

2. $(n \vee n')(1) = n(1) \vee n'(1) = 0 \vee 0 = 0.$

3. Sean $x_1 \leq x_2$, entonces teniendo en cuenta que tanto n como n' son negaciones se tiene que

   $(n \vee n')(x_1) = n(x_1) \vee n'(x_1) \geq n(x_2) \vee n'(x_2) = (n \vee n')(x_2)$

   es decir, $(n \vee n')$ es decreciente.

Por tanto $n \wedge n'$ y $n \vee n'$ son funciones de negación. ■

Lema 7 *Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ están bien definidas en el conjunto de las funciones de negación fuerte.*

Demostración. Como consecuencia del lema anterior sólo resta probar que $(n \wedge n')^2 = id$ y que $(n \vee n')^2 = id$.

1. $(n \wedge n')^2(x) = (n \wedge n')[(n \wedge n')(x)] = (n \wedge n')[n(x) \wedge n'(x)]$

   $= n[n(x) \wedge n'(x)] \wedge n'[n(x) \wedge n'(x)].$

   Si $n(x) \leq n'(x)$, es $n'(n(x)) \geq n'(n'(x)) = x$ y por tanto teniendo también en cuenta que n es una negación fuerte resulta

   $(n \wedge n')^2(x) = n(n(x)) \wedge n'[n(x)] = x \wedge n'[n(x)] = x.$

   Análogamente si $n'(x) \leq n(x)$ es $(n \wedge n')^2(x) = x.$

2. $(n \vee n')^2(x) = (n \vee n')[(n \vee n')(x)] = (n \vee n')[n(x) \vee n'(x)]$

   $= n[n(x) \vee n'(x)] \vee n'[n(x) \vee n'(x)]$

   Si $n(x) \leq n'(x)$, es $x = n(n(x)) \geq n(n'(x))$ y por tanto teniendo también en cuenta que n es una negación fuerte resulta

$(n \vee n')^2 (x) = n (n (x)) \vee n' [n (x)] = x \vee n' [n (x)] = x.$

De igual manera si $n' (x) \leq n (x)$ es $(n \vee n')^2 (x) = x$.

Por tanto $n \wedge n'$ y $n \vee n'$ son negaciones fuertes y ambas operaciones están bien definidas en el conjunto de las funciones de negación fuerte. ■

Teorema 8 *El conjunto* $\not{N}$ *tiene estructura de retículo completo.*

Demostración. Según [6] un retículo es un conjunto parcialmente ordenado en el que dados dos elementos cualesquiera existe un supremo y un ínfimo. Si se define la relación binaria en $\not{N}$ como $n \leq n' \Leftrightarrow n (x) \leq n' (x)$ para todo $x \in [0, 1]$, se comprueba trivialmente que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir es una relación de orden parcial. La existencia de supremo e ínfimo se deduce de manera casi inmediata de las definiciones de $\vee$ y $\wedge$. Por tanto $\not{N}$ es un retículo.

Para ver si dicho retículo es completo hay que comprobar que todo subconjunto de negaciones tiene supremo e ínfimo. Sea entonces $\{n_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de negaciones, se comprobará que $\bigwedge_{i \in I} n_i = \inf_{i \in I} n_i$ es una función de negación. La prueba de que $\bigwedge_{i \in I} n_i$ es el ínfimo de la familia $\{n_i\}_{i \in I}$ se deduce de la propia definición de $\wedge$. Trivialmente

$$\left(\bigwedge_{i \in I} n_i \right) (0) = \left(\inf_{i \in I} n_i \right) = \inf_{i \in I} n_i (0) = 0.$$

$$\left(\bigwedge_{i \in I} n_i \right) (1) = \left(\inf_{i \in I} n_i \right) (1) = \inf_{i \in I} [n_i (1)] = 1.$$

Y también si $x_1 \leq x_2$ entonces, como cada n_i es función de negación, se tiene que

$$\left(\bigwedge_{i \in I} n_i \right) (x_1) = \left(\inf_{i \in I} n_i \right) (x_1) = \inf_{i \in I} (n_i (x_1)) \geq \inf_{i \in I} (n_i (x_2)) =$$

$$\left(\inf_{i \in I} n_i \right) (x_2) = \left(\bigwedge_{i \in I} n_i \right) (x_2)$$

es decir, $\bigwedge_{i \in I} n_i$ es decreciente. Por lo tanto $\bigwedge_{i \in I} n_i$ es una función de negación.

De manera análoga se demuestra que $\bigvee_{i\in I} n_i = \sup_{i\in I} n_i$ es una función de negación. ■

El conjunto de las funciones de negación fuertes no es un retículo completo. Como contraejemplo basta tomar la familia de funciones de negación fuertes dada por $\left\{(1-\sqrt[n]{x})^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo ínfimo es la función de negación dada por

$$N(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

que no es fuerte.

Nota 9 *El conjunto* $\not{N}$ *de todas las negaciones no está totalmente ordenado. Para ello basta tomar las siguientes funciones de negación,*

$$N_1(x) = \frac{1-x}{1+2x} \qquad N_2(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1-2x \;\; si\; x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}(1-x) \;\; si\; x > \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

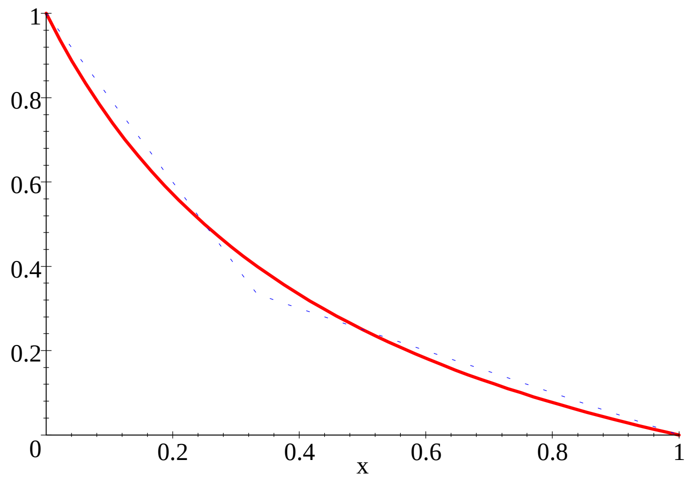
donde hay puntos en los que N_1 *es mayor que* N_2 *y puntos en los que sucede lo contrario. Por ejemplo si se toma* $x = 0,2$ *es*

$N_1(0,2) = 0,57143 < N_2(0,2) = 0,6.$

Sin embargo si se toma $x = 0,3$ *sucede que*

$N_1(0,3) = 0,\ 4375 > N_2(0,2) = 0,\ 4.$

En la siguiente representación gráfica de ambas negaciones se observa con *claridad el hecho citado.*



N_1 ——————— N_2 - - - - - -

Considérese ahora la composición de funciones negación. La pregunta que surge de manera natural es si dicha operación es interna. Sean por tanto N_1 y N_2 dos funciones de negación arbitrarias. Claramente se verifica que tanto la composición $N_1 \circ N_2$ como $N_2 \circ N_1$ son automorfismos en el intervalo unidad, es decir, ninguna de las dos posibles composiciones es función de negación. Sin embargo, como un sencillo ejercicio, se demuestra el siguiente

Teorema 10 *Sean N_1 , N_2, ..., N_n funciones de negación, entonces*

a) *Si n es par $N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n$ no es función de negación.*

b) *Si n es impar $N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n$ es función de negación.*

Demostración.

a) Si $n = 2$ entonces

$(N_1 \circ N_2)(0) = N_1(N_2(0)) = N_1(1) = 0$

es decir, $N_1 \circ N_2$ no es función de negación. De manera análoga se demuestra que $N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n$, para cualquier n par, no es función de negación.

b) Si $n = 3$ y teniendo en cuenta las propiedades de N_1, N_2 y N_3 se tiene que

- $(N_1 \circ N_2 \circ N_3)(0) = (N_1 \circ N_2)(N_3(0)) = (N_1 \circ N_2)(1) = N_1(N_2(1)) = N_1(0) = 1$.

- $(N_1 \circ N_2 \circ N_3)(1) = (N_1 \circ N_2)(N_3(1)) = (N_1 \circ N_2)(0) = N_1(N_2(0)) = N_1(1) = 0$.

- Si x_1 y x_2 son tales que $x_1 < x_2$, entonces $N_3(x_1) > N_3(x_2)$ y de ahí que $N_2(N_3(x_1)) < N_2(N_3(x_2))$, luego $N_1(N_2(N_3(x_1))) > N_1(N_2(N_3(x_2)))$, es decir $(N_1 \circ N_2 \circ N_3)(x_1) > (N_1 \circ N_2 \circ N_3)(x_2)$. Por consiguiente $N_1 \circ N_2 \circ N_3$ es decreciente.

Por tanto $N_1 \circ N_2 \circ N_3$ es función de negación.

Por inducción se demuestra para cualquier n impar, puesto que si es cierto para $n-2$ es $N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_{n-2} \circ N_{n-1} \circ N_n = (N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_{n-2}) \circ N_{n-1} \circ N_n$ y como por inducción $N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_{n-2}$ es función de negación, se repite la demostración para el caso $n = 3$. $\blacksquare$

Normalmente se considera que las negaciones son fuertes, por lo que será lo que se suponga a partir de este momento, es decir, siempre que se hable de una negación se sobreentenderá que es una negación fuerte.

En el caso de que N_1, N_2, ..., N_n sean funciones de negación fuertes sucede que

Teorema 11 *Sean N_1 , N_2, ..., N_n, con n impar, funciones de negación fuertes tales que $N_{n-k} = N_{k+1}$, con $k = 0, 1, ..., \frac{n-1}{2}$, entonces $N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n$ es una función de negación fuerte.*

Demostración. Según el teorema anterior $N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n$ es una función de negación, por lo que sólo resta comprobar que se verifica que $(N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n)^2 = id_{[0,1]}$.

Sean por tanto N_1, N_2, N_3, ..., N_{n-1}, N_n funciones de negación fuertes, de tal forma que $N_1 = N_n$, $N_2 = N_{n-1}$ y en general $N_{n-k} = N_{k+1}$, con $k = 0, 1, ..., \frac{n-1}{2}$. Por tanto $N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_{n-1} \circ N_n = N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1$. Y entonces, teniendo en cuenta las propiedades de las funciones de negación fuertes es

$$(N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_{n-1} \circ N_n)^2 = (N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1)^2 =$$

$$(N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1) \circ (N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1) =$$

$$N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ (N_1 \circ N_1) \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1 =$$

$$N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ id_{[0,1]} \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1 =$$

$$N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ (N_2 \circ N_2) \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1 =$$

$$N_1 \circ N_2 \circ N_3 \circ ... \circ id_{[0,1]} \circ N_3 \circ ... \circ N_2 \circ N_1 = ... =$$

$$N_1 \circ (N_2 \circ N_2) \circ N_1 = N_1 \circ id_{[0,1]} \circ N_1 = N_1 \circ N_1 = id_{[0,1]} \blacksquare$$

Capítulo 3

Funciones de implicación

3.1 Introducción/estado del arte

Nuestro conocimiento de los sistemas complejos es generalmente incompleto, si bien hay casos en los que a pesar de ser completo representa una ardua tarea su manejo, y, por tanto, tenemos que confiar en afirmaciones de los expertos. Esas afirmaciones no están, generalmente, formuladas en lenguaje matemático, sino que pertenecen al lenguaje natural. La Lógica Borrosa es una metodología para modelizar dichas afirmaciones. Teniendo en cuenta que parte del conocimiento experto consiste en frases del tipo "Si..., entonces...", es de gran importancia ser capaces de formalizarlas. En la abundante bibliografía existente dentro de la Lógica Borrosa sobre el tema se pueden encontrar diferentes aproximaciones al concepto borroso de implicación. Sin embargo, generalmente en Lógica Borrosa se entiende por implicación en un conjunto E una aplicación $\mathcal{J}$ sobre el conjunto de fuzzy sets $F(E) = [0,1]^E$ de la forma

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{J}: & [0,1]^E \times [0,1]^E & \longrightarrow & [0,1]^{E\times E} \\ & (\mu,\sigma) & \longrightarrow & \mu \to \sigma \end{array}$$

Ahora bien, una tal implicación $\mu \rightarrow \sigma$, cuando se puede expresar funcionalmente, lo hace a través de una función numérica de dos variables de la forma

$$(\mu \rightarrow \sigma)(x, y) = J(\mu(x), \sigma(y))$$

para todo $(x, y) \in E \times E$, donde J es una función numérica definida sobre el cuadrado unidad, es decir, $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Esta función recibe el nombre de operador de implicación, puesto que genera una implicación borrosa. Hasta ahora se consideraba que había dos formas básicas de describir un operador de implicación dentro de la lógica borrosa:

- Descripciones basadas en la representación explícita en términos de una t-norma, una t-conorma y una función de negación, como pueden ser $J_1(x, y) = S(N(x), y)$ ó $J_2(x, y) = S(N(x), T(x, y))$.
- Descripciones basadas en la representación implícita en términos de una t-norma, una t-conorma y una función de negación, como por ejemplo $J(x, y) = \sup\{z \in [0,1] : T(x, z) \leq y\}$.

En general la gran mayoría de las funciones de implicación que se usan dentro de la Lógica Borrosa se obtienen de ternas de De Morgan basándose en los formalismos de la Lógica Booleana, de la Lógica Intuicionista o de la Lógica Cuántica. Ahora bien, hay operadores de implicación que no se pueden describir de manera razonable de ninguna de las dos formas citadas. Este capítulo pretende recopilar todas esas funciones de implicación, de manera que sea posible incorporarlas al nuevo modelo, concretado en un conjunto mínimo de axiomas, que se presenta en esta tesis.

3.2 Definiciones

Dentro del análisis matemático del razonamiento lógico, la operación lógica de la implicación "$a \Rightarrow b$" es una herramienta esencial, tanto en el caso del razonamiento aproximado como lo es en la lógica bivaluada clásica. En general una implicación borrosa J, cuando se puede expresar funcionalmente, lo hace a través de una función de la forma

$$J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

de tal manera que para dos valores de verdad cualesquiera de dos enunciados "a es p" y "b es q" dados, el valor de verdad del predicado condicional "Si a es p, entonces b es q" viene definido por $J\left(\mu_p(a), \mu_q(b)\right)$. Esta función tiene que ser claramente una extensión de la implicación clásica $p \Rightarrow q$. Ahora bien, en la lógica Booleana una manera de definir dicha operación es a través de $a \Rightarrow b = \neg a \vee b$ y a partir de la generalización natural de sus propiedades se ha considerado la definición de función de implicación en Lógica Borrosa. Pero dicha generalización es, en cierto modo, incompleta, tal y como se ve a continuación.

En un Álgebra de Boole $(B, +, \cdot, ')$ una operación $\rightarrow : B \times B \longrightarrow B$ es una implicación si, para todo x, y en B, es $x \cdot (x \rightarrow y) \leq y$, desigualdad que es equivalente a $x \rightarrow y \leq x' + y$. Por tanto, la implicación material no es la única implicación clásica, aunque sí la mayor. Partiendo de la expresión general de una función booleana, es decir, $f(x, y) = \alpha xy + \beta x'y + \gamma xy' + \delta x'y'$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1\} \subset B$, en [40] se demuestra que, además de la implicación material, sólo existen seis funciones booleanas que cumplen dicha condición. A saber: $x \cdot y$, $x' \cdot y$, $x \cdot y + x' \cdot y'$, x', $x' \cdot y'$ e y, y cuyas tablas de verdad son, respectivamente

$x' + y$	0	1
0	1	1
1	0	1

$x \cdot y$	0	1
0	0	0
1	0	1

$x' \cdot y$	0	1
0	0	1
1	0	0

$x \cdot y + x' \cdot y'$	0	1
0	1	0
1	0	1

x'	0	1
0	1	1
1	0	0

$x' \cdot y'$	0	1
0	1	0
1	0	0

y	0	1
0	0	1
1	0	1

Atendiendo a las propiedades de frontera, monotonía e intercambio, estas implicaciones clásicas se pueden generalizar de manera natural para que sirvan como base para distintos modelos de función de implicación en lógica borrosa. Dicha generalización se hará de forma análoga a la hecha en [46] con la implicación material y que dio origen a la definición 12 que se presenta a continuación.

Se debe hacer notar que, en todo lo que sigue, siempre que se diga implicación se debe entender una operación booleana $\rightarrow: B \times B \longrightarrow B$ verificando que para todo x, y en B, es $x \rightarrow y \leq x' + y$, mientras que la expresión función de implicación hace referencia a una función $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ verificando alguno de los conjuntos de axiomas que se presentan a continuación.

3.2.1 Función de implicación $x' + y$

Definición 12 *Una función $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es una función de implicación si verifica para todo x, y, z en $[0,1]$ los siguientes axiomas*

1. $J(x_2, y) \leq J(x_1, y)$ si $x_1 \leq x_2$, es decir J es decreciente en la primera variable.

2. $J(x, y_1) \leq J(x, y_2)$ si $y_1 \leq y_2$, es decir J es creciente en la segunda variable.

3. $J(0, y) = 1$.

4. $J(1, y) = y$.

5. $J(x, J(y, z)) = J(y, J(x, z))$.

De ellas se dirá ahora que son funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, es decir, funciones de implicación que generalizan la implicación booleana $x' + y$. Adicionalmente estas funciones también pueden verificar

6. $J(x, 0) = N(x)$ es una negación fuerte.

7. J es continua.

8. $J(x, y) = J(N(y), N(x))$ para alguna negación fuerte N.

9. $J(x, x) = 1$.

10. $x \leq y$ si y sólo si $J(x, y) = 1$.

Ejemplos de operadores que son funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, son las S-implicaciones (S por *strong*) y las R-implicaciones (R por *residuated*), que se definen, respectivamente, como $J(x, y) = S(N(x), y)$ con S una t-conorma y N una función de negación fuerte [34] y la implicación residuada con respecto a una t-norma continua por la izquierda T como $J^T(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] : T(x, z) \leq y\}$.

Sin embargo, aunque la definición de función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ ha sido comúnmente aceptada, en Control Borroso no es frecuente utilizar la implicación material como modelo para representar enunciados condicionales, sino que parece más adecuado elegir la operación $x \cdot y$ como modelo de implicación ya que sólo es verdadera si ambos x e y son verdaderos. Se evita así la posibilidad de que se dispare una regla en el caso de que el antecedente no sea un hecho.

Resumiendo, el concepto de implicación en el marco de la lógica borrosa no está unívocamente determinado por la definición dada en [46] sino que dependerá de la implicación clásica que se generalice. Sin embargo hay ciertas propiedades comunes a todas ellas, de manera similar a lo que ocurre en el caso booleano.

Como ya se ha comentado anteriormente, en lógica booleana una función $\rightarrow$ es implicación si $x \rightarrow y \leq x' + y$, por lo que en el caso borroso una función de implicación J debería también verificar la ley $J(x, y) \leq x' + y$ para los x, y pertenecientes a $\{0, 1\}$, incluyendo así el caso booleano. En particular, deberá ser $J(1, 0) \leq J_{x'+y}(1, 0) = 0$, es decir, una función de implicación J deberá verificar $J(1, 0) = 0$. Esta condición modeliza una de las características de las relaciones causa/efecto que se emplean en el lenguaje natural. Es decir, si existe una causa cuya veracidad ha quedado establecida, pero sin embargo el efecto esperado no se produce, es claro que la relación causa/efecto no es válida.

Por otro lado, considérese el caso en el que tanto el antecedente ("*x es A*"), como el consecuente ("*y es B*") de una regla dada ("*Si x es A, entonces y es B*") pertenezcan al conjunto de hechos totalmente verdaderos. Esta situación se puede considerar como complementaria a la expresada anteriormente, puesto que ahora se plantea la veracidad de la causa y el efecto, por lo que podemos concluir, que la relación causa/efecto expresada es cierta. En tal caso sería razonable pensar que la regla es adecuada y por tanto su valor de verdad también debe de ser 1, es decir, el valor de la función de implicación J si $x = 1$ e $y = 1$, debe de ser 1.

Por ello, resumiendo, las condiciones frontera necesarias para que un operador J sea considerado función de implicación son $J(1,0) = 0$ y $J(1,1) = 1$. Ahora bien, dependiendo de las condiciones de monotonía que verifique podrá pertenecer a uno u otro tipo de función de implicación borrosa.

Teniendo en cuenta estas condiciones se observa en las tablas de verdad anteriores que sólo cuatro de las siete implicaciones booleanas las verifican, a saber: $x' + y$, $x \cdot y$, $x \cdot y + x' \cdot y'$ e y. Como la primera ya ha sido modelizada se presta ahora atención a la axiomatización de las restantes.

3.2.2 Función de implicación $x \cdot y$

Al igual que en el caso de la implicación $x' + y$, y atendiendo a las condiciones de frontera, a la monotonía de ambas variables y a la propiedad del intercambio que verifica la implicación booleana $x \cdot y$, se obtiene el siguiente modelo.

Definición 13 *Una función* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es una función de implicación* $FI_{x \cdot y}$ *si verifica para todo* x, y, z *en* $[0,1]$ *los siguientes axiomas*

1. $J(x_1, y) \leq J(x_2, y)$ *si* $x_1 \leq x_2$*, es decir* J *es creciente en la primera variable.*

2. $J(x, y_1) \leq J(x, y_2)$ *si* $y_1 \leq y_2$*, es decir* J *es creciente en la segunda variable.*

3. $J(0, y) = 0$.

4. $J(1, y) = y$.

5. $J(x, J(y, z)) = J(y, J(x, z))$.

Como ejemplos sencillos de funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x \cdot y}$ se pueden citar tanto la llamada implicación de Mamdani, definida por $M(x, y) =$

$Min(x, y)$, como la implicación de Larsen, dada por $L(x, y) = x \cdot y$. Estos operadores, de aplicación en control borroso, no son, sin embargo, funciones de implicación en el sentido utilizado hasta ahora, es decir, funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$. Por supuesto, para toda t-norma T, el operador definido por $J(x, y) = T(x, y)$ es también una función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$.

3.2.3 Función de implicación $x \cdot y + x' \cdot y'$

De forma similar al caso de la implicación material y de la implicación producto, teniendo en cuenta las propiedades de la implicación $x \cdot y + x' \cdot y'$, se considera que

Definición 14 *Una función* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es una función de implicación* $FI_{x\cdot y+x'\cdot y'}$ *si para todo* x, y *en* $[0,1]$ *se verifican los siguientes axiomas*

1. $J(0,0) = 1$.
2. $J(x,1) = J(1,x) = x$.
3. $J(x,y) = J(y,x)$.

Como ejemplo de operadores que verifiquen estos axiomas se pueden citar muchas de las indistinguibilidades, una de las cuales es la indistinguibilidad de Łukasiewicz dada por $E(x, y) = 1 - |x - y|$.

Se recuerda que, dada una t-norma T, una T-indistinguibilidad en $[0,1]$ es un operador $E : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que asigna a cada par de objetos x, y un número $E(x, y)$ verificando para todo x, y, z en $[0,1]$ que

1. $E(x,x) = 1$
2. $E(x,y) = E(y,x)$

3. $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)$

Antes de proseguir se debe de hacer notar que, si bien a los dos tipos de funciones de implicación definidos anteriormente se les exige que cumplan el principio del intercambio, no sucede lo mismo con las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y+x'\cdot y'}$. La razón para ello deriva del hecho de que la implicación booleana $x \cdot y + x' \cdot y'$ tampoco lo verifica, como es fácilmente comprobable.

3.2.4 Función de implicación y

Y por último, las propiedades que verifica la implicación booleana y lleva de forma natural a

Definición 15 *Una función* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es una función de implicación* FI_y *si para todo* x, y *en* $[0,1]$ *se verifican los siguientes axiomas*

1. $J(x,0) = 0$.
2. $J(x,1) = 1$.
3. $J(x,y_1) \leq J(x,y_2)$ *si* $y_1 \leq y_2$*, es decir,* J *es creciente en la segunda variable.*
4. $J(x_1,y) = J(x_2,y)$ *para todo* x_1*,* x_2*, es decir,* J *no depende de la primera variable.*

Operadores que cumplan dichas condiciones son, por ejemplo, $J_1(x,y) = y$, $J_2(x,y) = sen\frac{\pi}{2}y$ o también $J_3(x,y) = \sqrt{y}$.

Es importante recalcar que los modelos de función de implicación borrosa definidos en esta sección son excluyentes entre sí, es decir, no es posible encontrar un operador que verifique más de un conjunto de axiomas. Esto es fácilmente verificable atendiendo a las condiciones frontera y de monotonía de cada uno de dichos modelos.

En lo que sigue y por comodidad en la notación, se llamará de la siguiente forma a los respectivos tipos de funciones de implicación que se acaban de definir:

- A las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, que generalizan la implicación material, se les denominará *funciones de implicación materiales.*
- A las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$, que generalizan la implicación producto, se les denominará *funciones de implicación producto.*
- A las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y+x'\cdot y'}$, que generalizan la implicación equivalencia, se les denominará *funciones de implicación equivalencia*
- A las funciones de implicación FI_{y}, que generalizan la implicación proyección, se les denominará *funciones de implicación proyección.*

3.3 Propiedades

Una vez definidos los cuatro anteriores tipos de función de implicación, se atiende ahora a las propiedades que verifica cada uno de ellos en particular.

3.3.1 Funciones de implicación materiales

Las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ han sido ampliamente estudiadas e incluso se han dado teoremas de caracterización para algunas de ellas, concretamente para las R y S-implicaciones (ver [1]), que son las más usadas. En dicho artículo [1] se demuestran los siguientes resultados

Teorema 16 *Todo operador* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *verifica*

i) $J(0,0) = 1,\ J(1,0) = 0.$

ii) J *es continua por la izquierda en la primera variable.*

iii) $J(x, J(y,z)) = J(y, J(x,z))$ *para todo* x, y, z *en* $[0,1]$.

si y sólo si existe una operación asociativa y conmutativa S *en* $[0,1]$ *con elemento neutro* 0 *y una función continua* $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *con* $N(0) = 1$ *y* $N(1) = 0$ *tal que* $J(x,y) = S(N(x), y)$.

Teorema 17 *Todo operador* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *verifica*

i) $J(1,x) = x$ *para todo* x *en* $[0,1]$.

ii) J *es continua por la izquierda en la segunda variable.*

iii) $J(x, J(y,z)) = J(y, J(x,z))$ *para todo* x, y, z *en* $[0,1]$.

iv) J *es creciente en la segunda variable.*

v) $J(x,y) = 1$ *si y sólo si* $x \leq y$.

si y sólo si existe una t-norma T *continua por la derecha en la segunda variable tal que* $J(x,y) = \sup\{c \in [0,1]\,; T(x,c) \leq y\}$.

De los dos teoremas de caracterización citados se deducen dos hechos importantes. Por un lado que una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ continua es siempre una S-implicación y, por otro, que una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ verificando que $J(x,y) = 1$ si y sólo si $x \leq y$ es necesariamente una R-implicación.

Ahora bien, no todas las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ pertenecen sólo a alguno de los dos tipos anteriores (R o S-implicaciones), sino que se usan otras funciones que, si bien son $\mathrm{FI}_{x'+y}$, no son en cambio sólo de estos tipos. Un ejemplo que merece la pena citar es la implicación exponencial definida de la forma $E(x,y) = y^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $E(0,0) = 1$ por Yager [50].

Dicho operador se puede comprobar con facilidad que es función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, pero no es ni R-implicación ni S-implicación (ver [42]), como se demuestra a continuación.

- Si $E(x,y)$ fuese R-implicación, es decir, si existiese una t-norma T tal que $E(x,y) = J^T(x,y)$, sería $x^x = J^T(x,x) = 1$ para todo x de $[0,1]$, lo cual es imposible si $x \neq 1$.

- Por otro lado tampoco es una S-implicación, ya que si lo fuese, tomando $y = 0$, para todo $x > 0$ se tendría $y^x = 0 = S(N(x), 0) = N(x) = 0$, es decir, para todo $x > 0$ sería $N(x) = 0$, por lo que N no podría ser una negación fuerte.

Así pues hay operadores que, si bien son funciones de implicación materiales, no son ni R ni S-implicaciones. Se exponen a continuación algunas propiedades generales de las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ que pueden prestar ayuda a la hora de determinar si un operador es o no es función de implicación material.

Teorema 18 *Sea $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función de implicación $FI_{x'+y}$, entonces $J(x,y) \geq y$ para todo $x, y \in [0,1]$.*

Demostración. Si J es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ es decreciente en la primera componente y por tanto para todo $x, y \in [0,1]$ se tiene que $J(x,y) \geq J(1,y)$. Ahora bien, por el axioma de la neutralidad de la verdad se tiene que $J(1,y) = y$, es decir $J(x,y) \geq y$. ■

Se deduce inmediatamente

Corolario 19 *Sea $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función de implicación $FI_{x'+y}$, entonces $J(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$.*

Estas dos propiedades ayudan a la hora de determinar si un operador es o no una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, como sucede, por ejemplo, en el caso de las QM-implicaciones.

Se recuerda que una QM-implicación es un operador $Q : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definido por $Q(x,y) = S(N(x), T(x,y))$ donde T es una t-norma, S una t-conorma y N una negación fuerte [34].

Dichos operadores, a pesar de verificar las condiciones de contorno, no son en todos los casos funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, como se verá a continuación. Ése es el motivo por el cual se considera más acertado denominar a dichos operadores QM-operadores y así será como se les denomine en lo que resta, reservando el nombre de QM-implicación para aquellos QM-operadores que sí son funciones de implicación materiales.

Llamaremos operador material extendido a un operador $Q_e : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definido por $Q_e(x,y) = S(T[N(x), S(y, N(y))], T(x,y))$ donde T es una t-norma, S una t-conorma y N una negación fuerte. Este tipo de operadores provienen de la expresión booleana $a \to b = a'(b+b') + ab$, que en el álgebra booleana es equivalente a $a \to b = a'(b+b') + ab = a' + ab = a' + b$, y de ahí su nombre de operador material extendido.

Se demuestran a continuación algunas condiciones necesarias para que un operador QM sea función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$.

Teorema 20 *Sea $Q : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un QM-operador. Si Q es una función de implicación $FI_{x'+y}$ entonces existe un automorfismo de orden $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que $S = W_\varphi^*$ y $N \geq N_\varphi$.*

Demostración. Como consecuencia del corolario anterior se tiene que si Q es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ tiene que verificarse $Q(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$, es decir,

$$1 = Q(x,1) = S(N(x), T(x,1)) = S(N(x), x)$$

Por lo tanto, en función de la t-conorma considerada se tiene que

- Si $S = Max$ no sucede nunca.

- Si $S \in \mathcal{F}(Prod^*)$, es decir, es de la forma $S = Prod^*_\varphi$ con φ un automorfismo de orden entonces $S(N(x), x) = \varphi^{-1} \circ Prod^*(\varphi(N(x)), \varphi(x)) = \varphi^{-1}[\varphi(N(x)) + \varphi(x) - \varphi(N(x)) \cdot \varphi(x)] = 1$ y sólo sucede si $\varphi(N(x)) = 1$ ó $\varphi(x) = 1$, es decir, si $x = 0$ ó $x = 1$.

- Si $S = W^*_\varphi$ con φ un automorfismo de orden es $S(N(x), x) = \varphi^{-1} \circ Min(1, \varphi(N(x)) + \varphi(x)) = 1$. Por tanto $\varphi(N(x)) + \varphi(x) \geq 1$ y $N(x) \geq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)) = N_\varphi(x)$.

- Si S es una suma ordinal de t-conormas, se tiene de manera inmediata que Q no es función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$. ■

Corolario 21 *Sea $Q_e : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un operador material extendido. Si Q_e es una función de implicación $FI_{x'+y}$ entonces existe un automorfismo de orden $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que $S = W^*_\varphi$ y $N \geq N_\varphi$.*

Demostración. Como $Q_e(x,1) = S(T[N(x), S(1, N(1))], T(x,1)) = S(N(x), x)$, la demostración es análoga a la realizada en el teorema anterior. ■

Entonces para que un operador QM sea función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ es necesario que $S = W^*_\varphi$ y $N(x) \geq N_\varphi(x)$ donde $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es un automorfismo de orden. Pero dichas condiciones no son suficientes. Tómese, por ejemplo, $\varphi = id$ y $S = W^*$, $N(x) = 1 - x^2$ y $T = Z$ la t-norma más pequeña.

Teorema 22 *Sea un QM-operador* $Q(x,y) = S(N(x), T(x,y))$*, donde* $S = W_\varphi^*$ *con* φ *un automorfismo de orden, que es función de implicación* $FI_{x'+y}$*. Entonces* $T(x,y) \geq \varphi^{-1} \circ W(1-\varphi(N(x)), \varphi(y))$*.*

Demostración. Si Q es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ tiene que verificar $Q(x,y) \geq y$. Pero $S = W_\varphi^* = \varphi^{-1} \circ W^* \circ (\varphi \times \varphi)$ por lo que

$$y \leq Q(x,y) = S(N(x), T(x,y)) = \varphi^{-1} \circ W^*(\varphi(N(x)), \varphi(T(x,y))) =$$
$$\varphi^{-1} \circ Min(1, \varphi(N(x)) + \varphi(T(x,y)))$$

O bien $\varphi(y) \leq Min(1, \varphi(N(x)) + \varphi(T(x,y)))$. Entonces

$$\varphi(y) \leq \varphi(N(x)) + \varphi(T(x,y))$$

y

$$\varphi(y) - \varphi(N(x)) \leq \varphi(T(x,y)),$$

o también

$$W(1-\varphi(N(x)), \varphi(y)) \leq \varphi(T(x,y)),$$

es decir $T(x,y) \geq \varphi^{-1} \circ W(1-\varphi(N(x)), \varphi(y))$. ■

Corolario 23 *Sea* $Q_e(x,y) = S(T[N(x), S(y, N(y))], T(x,y))$ *un operador material extendido, donde* $S = W_\varphi^*$ *con* φ *un automorfismo de orden, que es función de implicación* $FI_{x'+y}$*. Entonces se verifica* $T(x,y) \geq \varphi^{-1} \circ W(1-\varphi(N(x)), \varphi(y))$*.*

Demostración. Se verifica trivialmente puesto que por propiedades de las t-normas

$$Q_e(x,y) = S(T[N(x), S(y, N(y))], T(x,y)) \leq S(N(x), T(x,y))$$

es decir, el operador material extendido Q_e es menor o igual que un QM-operador y aplicando el teorema anterior se llega al resultado. ■

Lema 24 *Sea* $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *un automorfismo de orden y* N *una negación fuerte. El operador* $M : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *definido por* $M(x,y) = \varphi^{-1} \circ W(1 - \varphi(N(x)), \varphi(y))$ *es una t-norma si y sólo si* $N = N_\varphi$.

Demostración.

"$\Leftarrow$" Si $N = N_\varphi$ se tiene que

$$M(x,y) = \varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(x) + \varphi(y) - 1) = [\varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)](x,y)$$

y M es una t-norma.

"$\Rightarrow$" Si M es una t-norma, tiene que ser $M(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces, como φ es un automorfismo de orden,

$$x = M(x,1) = \varphi^{-1} \circ W(1 - \varphi(N(x)), \varphi(1)) =$$
$$\varphi^{-1} \circ W(1 - \varphi(N(x)), 1) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(N(x)))$$

Por lo tanto $\varphi(x) = 1 - \varphi(N(x))$ y $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)) = N_\varphi(x)$. ■

Como consecuencia directa del teorema 16 se tiene que todo QM-operador continuo que es función de implicación material es una S-implicación. Es más tienen la forma siguiente

Teorema 25 *Sea un* QM*-operador* $Q(x,y) = S(N(x), T(x,y))$ *continuo que es función de implicación material. Entonces*

a) Si $T = W_\varphi$ *y* $N = N_\varphi$, *es* $S(N(x), T(x,y)) = Max(N_\varphi(x), y)$.

b) Si $T = Prod_\varphi$ *y* $N = N_\varphi$, *es* $S(N(x), T(x,y)) = Prod^*_\varphi(N_\varphi(x), y)$.

c) Si $T = Min$ *y una negación fuerte* $N \geq N_\varphi$, *es* $S(N(x), T(x,y)) = W^*_\varphi(N(x), y)$.

Demostración. Por el teorema 20 necesariamente es $S = W_\varphi^* = \varphi^{-1} \circ W^* \circ (\varphi \times \varphi)$. Por tanto, además

a) Si $T = W_\varphi = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ y $N = N_\varphi$, se tiene

$S\left(N\left(x\right), T\left(x, y\right)\right) = \varphi^{-1} \circ W^* \left(\varphi\left(N_\varphi\left(x\right)\right), \varphi\left(\varphi^{-1} \circ W\left(\varphi\left(x\right), \varphi\left(y\right)\right)\right)\right) =$

$\varphi^{-1} \circ W^* \left(1 - \varphi\left(x\right), W\left(\varphi\left(x\right), \varphi\left(y\right)\right)\right) =$

$\varphi^{-1} \circ Min\left(1, 1 - \varphi\left(x\right) + Max\left(0, \varphi\left(x\right) + \varphi\left(y\right) - 1\right)\right) =$

$\varphi^{-1} \circ Min\left(1, Max\left(1 - \varphi\left(x\right), \varphi\left(y\right)\right)\right) = \varphi^{-1} \circ Max\left(1 - \varphi\left(x\right), \varphi\left(y\right)\right) =$

$Max\left(N_\varphi\left(x\right), y\right)$

b) Si $T = Prod_\varphi = \varphi^{-1} \circ Prod \circ (\varphi \times \varphi)$ y $N = N_\varphi$, se tiene

$S\left(N\left(x\right), T\left(x, y\right)\right) = \varphi^{-1} \circ Min\left(1, 1 - \varphi\left(x\right) + \varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)\right) =$

$\varphi^{-1}\left(1 - \varphi\left(x\right) + \varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)\right) = \left[\varphi^{-1} \circ Prod^* \circ (\varphi \times \varphi)\right]\left(N_\varphi\left(x\right), y\right)$

c) Si $T = Min$, es $T = \varphi^{-1} \circ Min \circ (\varphi \times \varphi)$ y

$S\left(N\left(x\right), T\left(x, y\right)\right) = \varphi^{-1} \circ Min\left(1, \varphi\left(N\left(x\right)\right) + Min\left(\varphi\left(x\right), \varphi\left(y\right)\right)\right) =$

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi^{-1} \circ Min\left(1, \varphi\left(N\left(x\right)\right) + \varphi\left(x\right)\right) & \text{si } \varphi\left(x\right) \leq \varphi\left(y\right) \\ \varphi^{-1} \circ Min\left(1, \varphi\left(N\left(x\right)\right) + \varphi\left(y\right)\right) & \text{si } \varphi\left(y\right) \leq \varphi\left(x\right) \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{cc} 1 & \text{si } x \leq y \\ \varphi^{-1} \circ Min\left(1, \varphi\left(N\left(x\right)\right) + \varphi\left(y\right)\right) & \text{si } y \leq x \end{array}\right\} =$$

$\varphi^{-1} \circ Min\left(1, \varphi\left(N\left(x\right)\right) + \varphi\left(y\right)\right) = \left[\varphi^{-1} \circ W^* \left(\varphi \times \varphi\right)\right]\left(N\left(x\right), y\right)$ ■

La importancia del teorema anterior reside en el hecho de que, bajo ciertas condiciones, la forma del QM-operador $S\left(N\left(x\right), T\left(x, y\right)\right)$ que sea continuo está totalmente determinada.

Del resto de los casos continuos no se ha llegado a ninguna conclusión.

En el caso de que el QM-operador no sea continuo tampoco se puede decir nada, puesto que hay casos en los que ni siquiera es función de implicación.

Por ejemplo, tomando $\varphi = id$ y $T = Z$ la t-norma más pequeña se tiene que

$$Q(x,y) = S(N(x), T(x,y)) = W^*(1-x, Z(x,y)) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 1-x & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

que no es una función de implicación. Para comprobarlo basta tomar $x = 0,9$ e $y = 0,5$, de donde resulta que $Q(0,9; 0,5) = 0,1 \ngeq 0,5$.

En el caso de los operadores materiales extendidos se verifica un resultado totalmente análogo al anterior.

Teorema 26 *Sea* $Q_e(x,y) = S(T[N(x), S(y, N(y))], T(x,y))$ *un operador material extendido continuo. Entonces*

a) Si $T = W_\varphi$ *y* $N = N_\varphi$*, es* $Q_e(x,y) = Max(N_\varphi(x), y)$*.*

b) Si $T = Prod_\varphi$ *y* $N = N_\varphi$*, es* $Q_e(x,y) = Prod^*_\varphi(N_\varphi(x), y)$*.*

c) Si $T = Min$ *y una negación fuerte* $N \geq N_\varphi$*, es* $Q_e(x,y) =$ $W^*_\varphi(N(x), y)$*.*

Demostración. Por el teorema 20 necesariamente es $S = W^*_\varphi = \varphi^{-1} \circ W^* \circ (\varphi \times \varphi)$. Por tanto, además

a) Si $T = W_\varphi = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ y $N = N_\varphi$, se tiene

$S(T[N(x), S(y, N(y))], T(x,y)) =$

$\varphi^{-1} \circ W^* \{W[1-\varphi(x), W^*(\varphi(y), 1-\varphi(y))], W(\varphi(x), \varphi(y))\} =$

$\varphi^{-1} \circ W^* \{W[1-\varphi(x), Min(1, \varphi(y) + 1 - \varphi(y))], W(\varphi(x), \varphi(y))\} =$

$\varphi^{-1} \circ W^* \{1-\varphi(x), W(\varphi(x), \varphi(y))\} = W^*_\varphi(N_\varphi(x), W_\varphi(x,y))$

Y por el teorema anterior es

$S\left(T\left[N\left(x\right),S\left(y,N\left(y\right)\right)\right],T\left(x,y\right)\right)=W_{\varphi}^{*}\left(N_{\varphi}\left(x\right),W_{\varphi}\left(x,y\right)\right)=$

$Max\left(N_{\varphi}\left(x\right),y\right)$

b) Si $T=Prod_{\varphi}=\varphi^{-1}\circ Prod\circ\left(\varphi\times\varphi\right)$ y $N=N_{\varphi}$, operando de manera análoga al caso anterior, se tiene que

$S\left(T\left[N\left(x\right),S\left(y,N\left(y\right)\right)\right],T\left(x,y\right)\right)=W_{\varphi}^{*}\left(N_{\varphi}\left(x\right),Prod_{\varphi}\left(x,y\right)\right)$

Y por el teorema anterior es

$S\left(T\left[N\left(x\right),S\left(y,N\left(y\right)\right)\right],T\left(x,y\right)\right)=W_{\varphi}^{*}\left(N_{\varphi}\left(x\right),Prod_{\varphi}\left(x,y\right)\right)=$

$Prod_{\varphi}^{*}\left(N_{\varphi}\left(x\right),y\right)$

c) Si $T=Min$, es $T=\varphi^{-1}\circ Min\circ\left(\varphi\times\varphi\right)$ y procediendo de manera similar a los dos casos anteriores

$S\left(T\left[N\left(x\right),S\left(y,N\left(y\right)\right)\right],T\left(x,y\right)\right)=W_{\varphi}^{*}\left(N_{\varphi}\left(x\right),Min\left(x,y\right)\right)$

Y por el teorema anterior es

$S\left(T\left[N\left(x\right),S\left(y,N\left(y\right)\right)\right],T\left(x,y\right)\right)=W_{\varphi}^{*}\left(N_{\varphi}\left(x\right),Min\left(x,y\right)\right)=$

$W_{\varphi}^{*}\left(N\left(x\right),y\right)$ ■

Ejemplos

1. $J\left(x,y\right)=\left\{\begin{array}{ll} Min\left(1,\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso}\end{array}\right\}$

   $J=J^{Prod}$, es decir, es una R-implicación. Por tanto J es una función de implicación $FI_{x'+y}$.

2. $J\left(x,y\right)=Max\left(1-x,y\right)$

   J es una S-implicación, es decir, un operador de la forma $S\left(N\left(x\right),y\right)$ con S una t-conorma y N una función de negación. En este caso $S=Max$ y $N=1-i$. Por tanto sabemos de manera inmediata que J es una función de implicación material.

3. $J(x,y) = Max(1-x, Min(x,y))$

   Es un QM-operador, es decir un operador de la forma $S(N(x), T(x,y))$ donde S es una t-conorma, T una t-norma y N una función de negación. En este caso $S = Max$, $T = Min$ y $N = 1-i$. Por el teorema 20 y dado que $S = Max \notin \mathcal{F}(W^*)$ se sabe que J no es función de implicación. Sin embargo sí es creciente en la segunda variable (se comprueba fácilmente), aunque no existe monotonía en la primera. Para demostrarlo basta tomar, por ejemplo, $y = 1$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ y $x_3 = 0,75$.

4. $J(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y & \text{si } x = 1 \\ 1-x & \text{si } x \neq 1, y \neq 1 \\ 1 & \text{si } x \neq 1, y = 1 \end{array} \right\}$

   J es, al igual que en el caso anterior, un QM-operador, en concreto, $J(x,y) = Z^*(1-x, Z(x,y))$, sin embargo, como ni Z^* ni Z son continuas no se puede aplicar el mismo teorema que en el caso anterior. Veamos, por tanto, si se cumplen las condiciones de monotonía, contorno e intercambio que permiten afirmar que un operador es función de implicación material.

   Teniendo en cuenta que $J(0,5; 0,75) = 0,5 < J(1; 0,75) = 0,75$ y que $J(0,5; 0,5) = 0,5 > J(0,75; 0,5) = 0,25$ se llega a que no existe monotonía en la primera variable, y por tanto J_4 no es función de implicación. Sin embargo es fácil comprobar que sí es monótona, concretamente creciente, en la segunda variable.

   Respecto a la dominancia de la falsedad y la neutralidad de la verdad, se tiene por un lado que $J(0,y) = 1$ si $y \neq 1$ y $J(0,y) = 1 - 0 = 1$ si $y = 1$, es decir $J(0,y) = 1$ en todos los casos. Además $J(1,y) = y$ por definición.

3.3.2 Funciones de implicación producto

A pesar de su uso en Control Borroso las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ no han sido prácticamente estudiadas. Algunas de las propiedades que verifican se exponen a continuación.

Teorema 27 *Sea* $J : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación* $FI_{x\cdot y}$*, entonces* $J(x,y) \leq y$ *para todo* $x, y \in [0,1]$*.*

Demostración. Si J es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ es creciente en la primera componente y por tanto para todo $x, y \in [0,1]$ se tiene que $J(x,y) \leq J(1,y)$. Ahora bien, por el axioma de la neutralidad de la verdad se tiene que $J(1,y) = y$, es decir $J(x,y) \leq y$. ■

Hay que hacer notar que no se verifica un resultado análogo para la primera variable, es decir, no se verifica que $J(x,y) \leq x$ para todo $x, y \in [0,1]$. Para comprobarlo basta tomar como ejemplo el operador $J(x,y) = \sqrt{x} \cdot y$ que es función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ (se comprueba fácilmente) y sin embargo para $x = 0,25$ e $y = 1$ es $J(x,y) = 0,5 > 0,25 = x$.

Corolario 28 *Sea* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación* $FI_{x\cdot y}$*, entonces* $J(x,0) = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$*.*

Demostración. Si J es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ es creciente, por tanto $J(x,0) \leq J(1,0)$ y por el axioma 4 es $J(x,0) \leq J(1,0) = 0$. ■

Se ha comentado anteriormente que la implicación de Mamdani, definida por $M(x,y) = Min(x,y)$, es función de implicación producto. Pero dicha implicación no es la única t-norma que pertenece a la familia de implicaciones producto. Se puede comprobar de manera casi inmediata que todas las t-normas son funciones de implicación producto, es más, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 29 *Sea* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *un operador.* J *es una función de implicación* $FI_{x \cdot y}$ *conmutativa si y sólo si* J *es una t-norma.*

Demostración. Se demostrará en primer lugar la necesidad. Así, supóngase que J es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ conmutativa, de donde, por ser J función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$, se tiene J es creciente y además por el corolario anterior se sabe que se verifica la condición de contorno $J(x,0) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Sólo resta comprobar que J es asociativa. Utilizando la hipótesis de conmutatividad y la propiedad del intercambio se tiene que

$$J(x, J(y,z)) = J(x, J(z,y)) = J(z, J(x,y)) = J(J(x,y), z).$$

Respecto a la suficiencia, por ser J una t-norma es creciente en ambas variables, conmutativa y además verifica las condiciones de contorno $J(0,y) = 0$ y $J(1,y) = y$. Por tanto sólo resta comprobar que verifica la propiedad del intercambio.

Teniendo en cuenta que por ser una t-norma J es asociativa y que además es conmutativa se tiene que

$$J(x, J(y,z)) = J(x, J(z,y)) = J(J(x,z), y) = J(y, J(x,z))$$

es decir, J verifica la propiedad del intercambio, y por tanto es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ conmutativa. ■

Habría que mencionar antes de continuar que algunos autores han propuesto otras implicaciones que sólo generalizan parcialmente alguna de las implicaciones booleanas mencionadas. Así, por ejemplo, es el caso de la llamada por Dujet y Vincent *Force Implication* (implicación de fuerza), definida, ver [19] y [49], para todo x, y de $[0,1]$ de la forma $F(x,y) = x \cdot (1 - |x - y|)$.

Se comprueba de manera inmediata que la implicación de fuerza verifica las condiciones de frontera $F(0,y) = 0$ y $F(1,y) = y$, por lo que verifica la tabla de verdad de la implicación booleana $x \cdot y$. Sin embargo, dicho operador no verifica ni los axiomas de monotonía ni la propiedad del intercambio de la función de implicación $\mathrm{FI}_{x \cdot y}$ por lo que, a pesar de su nombre, no es función de implicación. Por ello cobran importancia los siguientes resultados que llevan a la completa caracterización de las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x \cdot y}$.

Teorema 30 *Un operador $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definido de la forma $J(x,y) = T(A(x), y)$, donde $A : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ creciente tal que $A(0) = 0$ y $A(1) = 1$ y T es una t-norma, es una función de implicación producto.*

Demostración. Sea una función $A : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ creciente tal que $A(0) = 0$ y $A(1) = 1$ y una t-norma T y considérese el operador definido por $J(x,y) = T(A(x), y)$. Trivialmente el operador J construido es creciente en ambas variables. Ahora bien, por propiedades de las t-normas, también se tiene que

1. $J(0,y) = T(A(0), y) = T(0,y) = 0$.
2. $J(1,y) = T(A(1), y) = T(1,y) = y$.
3. $J(x, J(y,z)) = T(A(x), T(A(y), z)) = T(A(y), T(A(x), z)) = J(y, J(x,z))$.

Por lo tanto J es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x \cdot y}$. ■

Parece lógico pensar que si las funciones de la forma $J(x,y) = T(A(x), y)$, donde $A : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ creciente tal que $A(0) = 0$ y $A(1) = 1$ y T es una t-norma, son funciones de implicación producto, los operadores de Mandani-Larsen definidos de la forma $J(x,y) = T(A(x), B(y))$, con $A, B : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ crecientes tal que $A(0) = B(0) = 0$ y $A(1) = B(1) = 1$

y T una t-norma también lo fuesen. Sin embargo, es casi inmediato comprobar que para que sean funciones de implicación producto es condición necesaria que $B(y) = y$, puesto que en caso contrario no verifican la propiedad del intercambio.

Teorema 31 *Sea $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función de implicación producto tal que $J(x,1)$ es estrictamente creciente. Entonces existe una función $A : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ creciente tal que $A(0) = 0$ y $A(1) = 1$ y una t-norma T de tal manera que $J(x,y) = T(A(x), y)$.*

Demostración. Sea J una función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ y considérense las siguientes funciones definidas a partir de dicho operador J

$$A(x) = J(x,1)$$
$$T(x,y) = J\left(A^{(-1)}(x), y\right)$$

Trivialmente la función A así definida es estrictamente creciente y $A(0) = 0$ y $A(1) = 1$. Se comprueba a continuación que la función T es una t-norma.

1. $T(x,1) = J\left(A^{(-1)}(x), 1\right) = A\left(A^{(-1)}(x)\right) = x$.

2. T es creciente en la primera componente.

3. Por la propiedad del intercambio de la función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ se tiene que

   $T(x,y) = J\left(A^{(-1)}(x), y\right) = J\left(A^{(-1)}(x), T(y,1)\right) =$

   $J\left(A^{(-1)}(x), J\left(A^{(-1)}(y), 1\right)\right) = J\left(A^{(-1)}(y), J\left(A^{(-1)}(x), 1\right)\right) =$

   $J\left(A^{(-1)}(y), T(x,1)\right) = J\left(A^{(-1)}(y), x\right) = T(y,x)$

   es decir, T es conmutativa.

4. Teniendo en cuenta que T es conmutativa y que se verifica la propiedad del intercambio para J se tiene que

   $T(x,T(y,z)) = T(x,T(z,y)) = J\left(A^{(-1)}(x), J\left(A^{(-1)}(z), y\right)\right) =$

   $J\left(A^{(-1)}(z), J\left(A^{(-1)}(x), y\right)\right) = T(z,T(x,y)) = T(T(x,y),z)$

   y se tiene que T es asociativa.

Y por último, teniendo en cuenta que A es estrictamente creciente, es

$$T(A(x),y) = J\left(A^{(-1)}(A(x)), y\right) = J(x,y)$$

que era lo que se quería demostrar. ■

Teorema 32 *Un operador $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ con $J(x,1)$ estrictamente creciente es una función de implicación $FI_{x \cdot y}$ si y sólo si existe una función $A : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ estrictamente creciente tal que $A(0) = 0$ y $A(1) = 1$ y una t-norma T de tal manera que $J(x,y) = T(A(x),y)$.*

Demostración. Se deduce de manera inmediata de los dos teoremas anteriores. ■

Nota 33 *Nótese que el teorema anterior únicamente da una caracterización para aquellas funciones de implicación producto J verificando que $J(x,1)$ sea estrictamente creciente. Sin embargo, hay funciones de implicación producto que no verifican dicha condición y que se pueden escribir de la forma $T(A(x),y)$ anterior. Basta considerar, como ejemplo, la siguiente función de implicación producto*

$$J(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ y & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Claramente es $J(x,1) = 0$ para $x = 0$ y $J(x,1) = 1$ en otro caso, que no es estrictamente creciente. Sin embargo se comprueba fácilmente que $J(x,y) = Prod(J(x,1), y)$.

Respecto a la unicidad de la descomposición de una función de implicación producto en una función creciente y una t-norma se puede afirmar

Teorema 34 *Sea* $J : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación* $FI_{x \cdot y}$ *con* $J(x,1)$ *estrictamente creciente. Entonces la descomposición* $J(x,y) = T(A(x), y)$ *donde* $A : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es una función estrictamente creciente tal que* $A(0) = 0$ *y* $A(1) = 1$ *y una t-norma* T *es única.*

Demostración. Supongamos que la descomposición de la función de implicación producto J no es única, es decir que existen $A' : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ estrictamente creciente tal que $A'(0) = 0$ y $A'(1) = 1$ y una t-norma T' tal que $J(x,y) = T'(A'(x), y)$.

Como T y T' son t-normas, para $y = 1$ y para todo x en $[0,1]$ se tendría que

- Por una parte $J(x,1) = T(A(x), 1) = A(x)$

- Por otra parte $J(x,1) = T'(A'(x), 1) = A'(x)$

Por tanto $A(x) = A'(x)$ para todo x en $[0,1]$.

Así pues, teniendo en cuenta que $J(x,1)$ es estrictamente creciente, se tiene

$T(x,y) = J(A^{-1}(x), y) = J(A'^{-1}(x), y) = T'(x,y)$

es decir, ambas t-normas son iguales y la descomposición es única. ■

Una vez caracterizada la forma de las funciones de implicación $x \cdot y$, la siguiente cuestión que se plantea es la relación existente entre la continuidad de la implicación J y de las funciones A y T que la componen. Como cabría esperar dicha relación es muy estrecha y así se refleja a continuación.

Teorema 35 *Una función de implicación* $FI_{x \cdot y}$ *de la forma* $J(x,y) = T(A(x), y)$ *es continua si y sólo si la t-norma* T *y la función* A *son continuas.*

Demostración. "$\Leftarrow$" Supóngase que A y T son continuas, entonces se sigue que $J(x,y) = T(A(x), y)$ es continua por ser composición de funciones continuas..

"$\Rightarrow$" Si J es continua, es continua en la primera componente, por lo que $A(x) = J(x,1)$ es continua. Pero además $A^{(-1)}$ también lo es, por lo tanto $T(x,y) = J\left(A^{(-1)}(x), y\right)$ es continua por ser composición de funciones continuas. ■

Teorema 36 *Una función de implicación producto de la forma* $J(x,y) = T(A(x), y)$ *es conmutativa si y sólo si* $A(x) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$*, es decir, si* $A = id_{[0,1]}$.

Demostración. La demostración es casi inmediata, puesto que si la función de implicación es conmutativa es $T(A(x), y) = T(A(y), x)$ para todo $x, y \in [0,1]$. En concreto para $y = 1$ es $T(A(x), 1) = T(A(1), x)$. Pero por propiedades de las t-normas y de la función A se tiene que $A(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

La suficiencia es trivial. ■

Ejemplos

1. $J(x,y) = Min(x,y)$

   Tal y como afirma el teorema 29, por ser $Min(x,y)$ una t-norma, J es una función de implicación producto.

2. $J(x,y) = Max(y(2x-1), 0)$

   Claramente J es creciente en ambas variables. Además $J(0,y) = 0$ y $J(1,y) = y$ para todo y. Por tanto sólo resta comprobar que verifica la propiedad del intercambio.

$J(x, J(y, z)) = J[x, Max(z(2y-1), 0)] =$

$Max[(2x-1) Max(z(2y-1), 0), 0] =$

$Max[Max(z(2y-1)(2x-1), 0), 0] =$

$Max[(2y-1) Max(z(2x-1), 0), 0] =$

$J[y, Max(z(2x-1), 0)] = J(y, J(x, z))$.

Por lo tanto J verifica la propiedad del intercambio y es función de implicación producto.

3. $J(x, y) = x(1 - |x - y|)$

   Se comprueba de manera inmediata que el operador definido verifica las condiciones de frontera $J(0, y) = 0$ y $J(1, y) = y$, sin embargo no verifica los axiomas de monotonía. Para comprobarlo basta tomar $x = 0,25$, $y_1 = 0,25$ e $y_2 = 0,5$.

3.3.3 Funciones de implicación equivalencia

Ya se ha comentado que las indistinguibilidades son ejemplos de funciones de implicación $\mathrm{FI}_{xy+x'y'}$, pero no son las únicas. Baste citar el operador definido por $J(x, y) = 1$ si $x = y = 0$ y $J(x, y) = T(x, y)$ en otro caso, donde T es una t-norma cualquiera. Dicho operador es trivialmente una función de implicación $\mathrm{FI}_{xy+x'y'}$ pero no una indistinguibilidad, puesto que existen $x \in [0, 1]$ para los que $J(x, x) \neq 1$.

Como ya se dijo al principio, en un Álgebra de Boole $(B, +\cdot,')$ si una operación $\rightarrow: B \times B \longrightarrow B$ es una implicación debe verificar $x \rightarrow y \leq x' + y$ y, por tanto, $y \rightarrow x \leq y' + x$, y si se tienen ambas cosas, es decir, es una equivalencia, es $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \leq xy + x'y'$. En funciones de implicación borrosas se tiene un resultado totalmente análogo.

Teorema 37 *Sea $I : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función de implicación $FI_{x'+y}$ y sea T una t-norma, entonces el operador definido por $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$ es una función de implicación $FI_{xy+x'y'}$.*

Demostración. Trivialmente el operador definido es conmutativo por lo que sólo resta comprobar que verifica la condición de contorno $J(0,0) = 1$ y también que $J(x,1) = J(1,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

a) $J(0,0) = T(I(0,0), I(0,0)) = T(1,1) = 1$.

b) Por el corolario 19 y por el axioma 4 de las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$ se sigue $J(x,1) = T(I(x,1), I(1,x)) = T(1,x) = x$. Y como J es conmutativo es $J(x,1) = J(1,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Así pues el operador $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$ es una función de implicación equivalencia. ■

Sin embargo el recíproco no se verifica, es decir, no toda función de implicación equivalencia es de la forma $T(I(x,y), I(y,x))$ con T una t-norma e I una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, tal y como se comprobará. Para ello será de gran utilidad el siguiente resultado.

Lema 38 *Para toda función de implicación equivalencia de la forma $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$, con T una t-norma e I una función de implicación $FI_{x'+y}$, se verifica $J(x,0) = I(x,0)$.*

Demostración. Supóngase que $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$, con T una t-norma e I una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, entonces para $y = 0$ se tiene que para todo $x \in [0,1]$ es

$$J(x,0) = T(I(x,0), I(0,x))$$

Ahora bien, por el axioma 3 de las funciones de implicación $x' + y$ y teniendo en cuenta las propiedades de las t-normas se llega a que

$$J(x,0) = T(I(x,0), I(0,x)) = T(I(x,0), 1) = I(x,0)$$

para todo $x \in [0,1]$. ■

Considérese el operador definido por

$$J(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ x & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ Min(1, x+y) & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

Se puede comprobar fácilmente que dicho operador J es una función de implicación $xy + x'y'$. Por lo tanto, si existiesen una t-norma T y una función I de implicación $x' + y$ tal que $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$, por el lema anterior sería $J(x,0) = I(x,0)$ y se tendría que $J(x,0) = x = I(x,0)$. Ahora bien, como I es función de implicación $x' + y$ es decreciente en la primera componente, lo que se contradice con el hecho de que para $y = 0$ es $I(x,0) = x$ que es estrictamente creciente.

Con este contraejemplo se ha demostrado que no todas las funciones de implicación equivalencia son de la forma $T(I(x,y), I(y,x))$, donde T una t-norma e I una función de implicación $x' + y$. Ahora bien, si una función equivalencia es de la citada forma $T(I(x,y), I(y,x))$ y la función I es un T-preorden se obtiene el siguiente resultado. Se recuerda que, dada una t-norma T, un T-preorden en $[0,1]$ es un operador $E : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que asigna a cada par de objetos x, y un número $E(x,y)$ verificando para todo x, y, z en $[0,1]$ que

1. $E(x,x) = 1$

2. $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)$

Teorema 39 *Sea* $I : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación* $FI_{x'+y}$ *y sea* T *una t-norma. Si* I *es* T*-preorden entonces la función de implicación* $FI_{xy+x'y'}$ *definida por* $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$ *es una* T*-indistinguibilidad.*

Demostración. Para demostrar que la función de implicación definida por $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$ es una T-indistinguibilidad hay que comprobar que verifica la propiedad reflexiva y que es T-transitiva, puesto que por construcción ya verifica la propiedad simétrica. Por tanto

1. Teniendo en cuenta que I es reflexivo y por propiedades de la t-norma T es

   $J(x,x) = T(I(x,x), I(x,x)) = T(1,1) = 1.$

2. Como I es t-transitivo y la t-norma T es asociativa se tiene que

   $T(J(x,y), J(y,z)) = T\{T(I(x,y), I(y,x)), T(I(y,z), I(z,y))\} =$

   $T\{T(I(x,y), T(I(y,z), I(z,y))), I(y,x)\} =$

   $T\{T(T(I(x,y), I(y,z)), I(z,y)), I(y,x)\} =$

   $T\{T(I(x,y), I(y,z)), T(I(z,y), I(y,x))\} \leq$

   $T\{I(x,z), I(z,x)\} = J(x,z).$

Entonces $J(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$ es una T-indistinguibilidad. ■

También se verifica el siguiente resultado

Teorema 40 *Sea* $I : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación* $FI_{x \cdot y}$ *y sean* S *una t-conorma y* N *una función de negación, entonces el operador definido por* $J(x,y) = S(I(x,y), I(N(x), N(y)))$ *es una función de implicación* $FI_{xy+x'y'}$*.*

Demostración. Teniendo en cuenta que S es una t-conorma y por los axiomas 3 y 4 de las funciones de implicación producto, veamos que se verifican las propiedades.

a) $J(0,0) = S(I(0,0), I(N(0), N(0))) = S(0,1) = 1$.

b) $J(1,x) = S(I(1,x), I(N(1), N(x))) = S(x,0) = x$.

c) Como I es conmutativo por ser función de implicación producto, trivialmente se deduce que el operador definido J también lo es.

Así pues el operador $J(x,y) = S(I(x,y), I(N(x), N(y)))$ es una función de implicación equivalencia. ■

La llamada (ver [27]) extensión T-probabilística del conectivo "si y sólo si" viene dado por la expresión $1 - x - y + 2T(x,y)$, donde T es un t-norma. Dicho operador es, en todos los casos, una función de implicación equivalencia tal y como se demuestra en el siguiente

Teorema 41 *Dada una t-norma T el operador $J(x,y) = 1-x-y+2T(x,y)$ es una función de implicación equivalencia.*

Demostración. Claramente por definición es tanto $J(0,0) = 1$ como $J(x,y) = J(y,x)$. Además, por propiedades de las t-normas es

$$J(x,1) = 1 - x - 1 + 2T(x,1) = 2x - x = x$$

Así pues $J(x,y) = 1 - x - y + 2T(x,y)$ es una función de implicación equivalencia. ■

Ejemplos

1. $J(x,y) = 1 - |x-y|$

   Se tiene que

- $J(0,0) = 1$.

- $J(x,1) = 1 - |x-1| = 1 - 1 + x = x$.

para todo x. Pero además $J(x,y) = J(y,x)$ por definición. Por tanto J es función de implicación equivalencia.

2. $J(x,y) = |1-(x+y)|$

   Se puede comprobar de manera casi inmediata que $J(x,y) = |1-(x+y)| = 1 - x - y + 2W(x,y)$, por lo que es función de implicación equivalencia.

3. $J(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } y < x \\ 1 & \text{si } x = y \\ 1-y & \text{si } y > x \end{array} \right\}$

   A pesar de que este operador verifica la tabla de verdad de la implicación booleana $xy + x'y'$, se tiene que $J(x,1) = 0 \neq x$ para todo $x \neq 0$. Por tanto J no es función de implicación equivalencia.

3.3.4 Funciones de implicación proyección

Las funciones de implicación proyección tienen escasa aplicación y uso, pero se considera necesario su estudio con el fin de completar, en cierta medida, el corpus teórico de las funciones de implicación. Así, se presentan a continuación algunas de las propiedades que verifican.

Teorema 42 *Sean J_1 y J_2 funciones de implicación FI_y y sea T una t-norma. Entonces $T(J_1(x,y), J_2(x,y))$ es una función de implicación FI_y.*

Demostración. Considérese $J(x,y) = T(J_1(x,y), J_2(x,y))$. Como J_1 y J_2 son funciones de implicación FI_y y T es una t-norma se tiene que

1. $J(x,0) = T(J_1(x,0), J_2(x,0)) = T(0,0) = 0$

2. $J(x,1) = T(J_1(x,1), J_2(x,1)) = T(1,1) = 1$

3. Sean $y \leq y'$, entonces

   $J(x,y) = T(J_1(x,y), J_2(x,y)) \leq T(J_1(x,y'), J_2(x,y')) = J(x,y')$

4. Trivialmente como $J_1(x_1,y) = J_1(x_2,y)$ y $J_2(x_1,y) = J_2(x_2,y)$ para todo x_1, x_2 entonces

   $J(x_1,y) = T(J_1(x_1,y), J_2(x_1,y)) = T(J_1(x_2,y), J_2(x_2,y)) = J(x_2,y)$

   para todo x_1, x_2.

Por lo tanto J es función de implicación FI_y. ■

Pero también se verifica

Teorema 43 *Sean J_1 y J_2 funciones de implicación FI_y y sea S una t-conorma. Entonces $S(J_1(x,y), J_2(x,y))$ es una función de implicación FI_y.*

Demostración. Es totalmente análoga al caso anterior. ■

Se debe hacer notar que, tal y como se han definido las funciones de implicación proyección, se tiene que si para cada y en $[0,1]$ se considera la función $f_y(x) = J(x,y)$, ésta es constante para todo x. Es decir, las funciones de implicación proyección no pueden depender de la variable x, por lo que serán funciones únicamente de y.

Ejemplos

1. $J(x,y) = \sqrt{y}$

   J es un operador creciente y también $J(x,0) = 0$, $J(x,1) = 1$. Por tanto J es una función de implicación proyección.

2. $J(x,y) = 1 - y$

   Claramente este operador no es función de implicación proyección puesto que no es creciente en la segunda variable.

3. $J(x,y) = \frac{1}{2}\left(y^2 + 1\right)$

   Este operador es creciente en su segunda variable y también $J(x,1) = 1$, pero $J(x,0) = \frac{1}{2} \neq 0$. Por tanto J no es función de implicación proyección.

Capítulo 4

Operadores de implicación y condicionalidad

Las aplicaciones que se derivan de la Lógica Borrosa necesitan de mecanismos de inferencia bien definidos para su aplicación práctica. Estos mecanismos de inferencia deben permitir definir unas reglas que partiendo de un conjunto de premisas puedan llegar a obtener un determinado conjunto de conclusiones. Se deben por tanto crear construcciones lógicas que relacionen las premisas con las conclusiones, relaciones que suelen expresarse como enunciados del tipo "Si..., entonces..." en el conjunto de elementos de partida.

4.1 Modus Ponens

En el cálculo proposicional clásico los enunciados condicionales del tipo "*Si p entonces q*" vienen representados por $p \rightarrow q = p' + q$, que es una operación en el álgebra de los enunciados. Cuando esta implicación es afirmada, es decir, cuando $p' + q = 1$, se obtiene una relación entre los elementos del álgebra. Naturalmente, no toda relación $\Rightarrow$ entre enunciados, de forma que

$p \Rightarrow q$ represente al enunciado verdadero "*Si* p*, entonces* q", vendrá dada por la forma "$p \Rightarrow q$ si y sólo si $p \rightarrow q = 1$" para alguna implicación $\rightarrow$. En general, una tal relación $\Rightarrow$ se dice que es un condicional respecto a un conjunto V, contenido en el universo de discurso, de enunciados tomados como "verdaderos", si se verifica la Meta-Regla del Modus Ponens, es decir, si "$p \Rightarrow q$ y $p \in V$: $q \in V$", la cual, utilizando funciones de pertenencia, puede comprimirse en la inecuación: $Min\left(\varphi_V\left(p\right), \varphi_{\Rightarrow}\left(p,q\right)\right) \leq \varphi_V\left(q\right)$ para cualesquiera enunciados p y q. Todo ello lleva de forma natural a la siguiente definición.

Definición 44 *Dado un universo de discurso* E*, un subconjunto borroso* $\mu : E \longrightarrow [0,1]$ *y una t-norma* T*, una relación borrosa* $R : E \times E \longrightarrow [0,1]$ *es un* $\mu - T$*-condicional si para todo* x*,* y *de* E *se verifica que* $T\left(\mu\left(x\right), R\left(x,y\right)\right) \leq \mu\left(y\right)$*. También se dice que* μ *es un* T*-estado lógico de* R*.*

En particular cuando $E = [0,1]$ *y* μ *es la identidad, se dirá que* R *es una función generadora de* T*-condicional o, abreviadamente, un* T*-condicional.*

Conviene no olvidar que la desigualdad anterior, al ser una generalización del caso clásico, la incluye como caso particular. Al verificar toda t-norma $T\left(1,1\right) = 1$, si μ es una función de pertenencia clásica para un subconjunto V y R una relación también clásica, se cumple, aplicando la desigualdad, que R es un condicional respecto a V.

Si T_1 es una t-norma tal que $T_1 \leq T$, un $\mu - T$-condicional para E es también un $\mu - T_1$-condicional para E, es decir, la $\mu - T$-condicionalidad es hereditaria por la izquierda en t-normas. Además si R no es un $\mu - T$-condicional, entonces tampoco es $\mu - T_1$-condicional para ninguna t-norma $T \leq T_1$.

Sabiendo que $J_\mu^T\left(x,y\right) = \sup\left\{z \in [0,1] : T\left(z, \mu\left(x\right)\right) \leq \mu\left(y\right)\right\}$, en [36] se demuestra la siguiente condición necesaria y suficiente para la $\mu - T$-

condicionalidad.

Teorema 45 *Si T es una t-norma continua por la izquierda, una relación R es un $\mu - T$-condicional para algún conjunto borroso $\mu \in [0,1]^E$ si y sólo si $R \leq J_\mu^T$.*

En un Álgebra de Boole se dice que una operación $\rightarrow: B \times B \longrightarrow B$ es una implicación si, para todo x, y en B, $x \rightarrow y \leq x' + y$, desigualdad que es equivalente a $x \cdot (x \rightarrow y) \leq y$. Sin embargo en Lógica Borrosa no sucede lo mismo y cada una de dichas desigualdades da lugar a dos conceptos diferentes. El primero de ellos ha sido estudiado en el capítulo anterior, por lo que el actual se va a dedicar al estudio de la segunda desigualdad aplicada en el ámbito borroso.

Concretamente, en el presente capítulo se pretende determinar, en la medida de lo posible, si las familias de funciones de implicación definidas en el capítulo anterior son funciones generadoras de T-condicional para alguna t-norma T o, abreviadamente, T-condicionales. Para la demostración de dicho punto serán de gran ayuda los siguientes resultados.

Teorema 46 *Sea $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un operador T-condicional. Si existe $a \in (0,1)$, tal que $H(a,0) > 0$, entonces $T \in \mathcal{F}(W)$.*

Demostración. Sea T una t-norma arbitraria. Como H es T-condicional se tiene que $T(x, H(x,y)) \leq y$ para todo x, y en $[0,1]$, en particular para $y = 0$ es $T(x, H(x,0)) = 0$ para todo x en $[0,1]$. Por tanto para $x = a$ es también $T(a, H(a,0)) = 0$. Ahora bien, como $a > 0$ y $H(a,0) > 0$ la única posibilidad es que $T = W_\varphi$, puesto que las t-normas de la familia de Łukasiewicz son las únicas con divisores de cero o bien T es una suma ordinal de t-normas, siempre y cuando las t-normas consideradas para su construcción pertenezcan a la familia de Łukasiewicz, por ello escribimos $T \in \mathcal{F}(W)$.

Teorema 47 *Sea* $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *un operador. Si* $H(1,0) > 0$, *entonces* H *no es condicional para ninguna t-norma.*

Demostración. Sea T una t-norma arbitraria. Si H fuese T-condicional se tendría que $T(x, H(x,y)) \leq y$ para todo x, y en $[0,1]$. En concreto para $x = 1$ e $y = 0$, sería $T(1, H(1,0)) \leq 0$, es decir, $T(1, H(1,0)) = 0$. Ahora bien, como T es una t-norma es $T(1, H(1,0)) = H(1,0)$ y por hipótesis $H(1,0) > 0$, lo que nos lleva a un absurdo y a concluir que H no es T-condicional para ninguna t-norma T. ∎

Teorema 48 *Sea* $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *un operador. La condición necesaria y suficiente para que existan* $x > y$ *tal que* $H(x,y) = 1$ *o bien* $H(1,y) > y$ *es que* H *no sea* T*-condicional para ninguna t-norma* T.

Demostración. " $\Rightarrow$ " Si el operador H no es T-condicional para ninguna t-norma T, tampoco lo es para la t-norma Z mínima, es decir existirán $x, y \in [0,1]$ tal que $Z(x, H(x,y)) > y$. Por tanto, teniendo en cuenta la definición de la t-norma se llega a que

$$Z(x, H(x,y)) = \begin{cases} Min(x, H(x,y)) & \text{si } Max(x, H(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & \text{si } H(x,y) = 1 \\ H(x,y) & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así pues necesariamente para que H no sea Z-condicional es que exista $x > y$ tal que $H(x,y) = 1$ o bien que exista y tal que $H(1,y) > y$.

" $\Leftarrow$ " Si existe $x > y$ tal que $H(x,y) = 1$ es

$$T(x, H(x,y)) = T(x,1) = x > y$$

es decir, H no sería T-condicional para ninguna t-norma T.

En caso de que existiese y tal que $H(1,y) > y$ se tiene que

$$T(1, H(1,y)) = H(1,y) > y$$

es decir, H tampoco sería T-condicional para ninguna t-norma T. ■

Corolario 49 *Una operador H verificando $H(1,y) = y$ es T-condicional para alguna t-norma T si y sólo si para todo $x > y$ es $J(x,y) \neq 1$.*

Demostración. Según el teorema anterior un operador no es T-condicional para ninguna t-norma T si y sólo si existe $x > y$ tal que $H(x,y) = 1$ o $H(1,y) > y$. Como H es tal que $J(1,y) = y$, la segunda condición no se verifica en ningún caso. Por lo tanto si el operador H es T-condicional para alguna t-norma T, necesariamente para todo $x > y$ debe ser $J(x,y) \neq 1$. ■

4.1.1 Funciones de implicación materiales

Se tratará en esta sección de estudiar qué funciones de implicación materiales son también T-condicionales para alguna t-norma T. Se estudiarán fundamentalmente las R-implicaciones, las S-implicaciones, las QM-implicaciones y la familia de la implicación exponencial.

Como ya se sabía (ver [22]), se verifica que $T\left(x, J^T(x,y)\right) = Min(x,y) \leq y$. Por tanto cualquier implicación residuada J^T asociada a una t-norma T es T_1-condicional para cualquier t-norma $T_1 \leq T$. Ahora bien, si se toma en el teorema 45 $E = [0,1]$ y μ como la identidad, es decir, se traduce el teorema 45 a operadores se obtiene que

Teorema 50 *Dada una t-norma continua T, un operador J es un T-condicional si y sólo si $J \leq J^T$.*

Por tanto, en particular, cualquier R-implicación J^{T_2} asociada a una t-norma T_2 es T_1-condicional para cualquier t-norma $T_1 \leq T_2$. Es decir, si T_1 y T_2 son dos t-normas continuas tal que $T_1 \leq T_2$, entonces $J^{T_2} \leq J^{T_1}$. Es más esta condición es suficiente, hecho que se demuestra en lo que sigue.

Lema 51 *Sean T_1 y T_2 dos t-normas continuas. Si $T_1 \leq T_2$, entonces $J^{T_2} \leq J^{T_1}$.*

Demostración. Como $T_1 \leq T_2$, para todo x, y es $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$, en concreto

$$T_1\left(x, J^{T_2}(x, y)\right) \leq T_1\left(x, J^{T_2}(x, y)\right)$$

Ahora bien, por propiedades de las implicaciones residuadas para todo x, y es $T_2\left(x, J^{T_2}(x, y)\right) = \min(x, y) \leq y$. Por tanto

$$T_1\left(x, J^{T_2}(x, y)\right) \leq T_1\left(x, J^{T_2}(x, y)\right) \leq y \text{ para todo } x, y$$

lo que es equivalente a que $J^{T_2}(x, y) \leq J^{T_1}(x, y)$ para todo x, y, es decir, $J^{T_2} \leq J^{T_1}$. ■

Lema 52 *Sean T_1 y T_2 dos t-normas continuas. Si T_1 y T_2 no son comparables entonces tampoco son comparables J^{T_1} y J^{T_2}.*

Demostración. Si T_1 y T_2 no son comparables, existen x_0, y_0 tal que $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ y existen x_1, y_1 tal que $T_2(x_1, y_1) < T_1(x_1, y_1)$. Así pues, siguiendo los pasos de la demostración del lema anterior, se tiene que

$$J^{T_1}(x_0, T_1(x_0, y_0)) > J^{T_2}(x_0, T_1(x_0, y_0)) \text{ y}$$

$$J^{T_1}(x_1, T_2(x_1, y_1)) < J^{T_2}(x_1, T_2(x_1, y_1)).$$

Por lo que J^{T_1} y J^{T_2} no son comparables. ■

Teorema 53 *Sean T_1 y T_2 dos t-normas continuas. J^{T_2} es T_1-condicional si y sólo si $T_1 \leq T_2$.*

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de los dos lemas previos y del teorema 50. ■

Este resultado expone que la T-condicionalidad de las R-implicaciones depende totalmente de la ordenación de las t-normas. Sin embargo, en el caso de las S y las QM-implicaciones, así como en el caso de los operadores materiales extendidos, se verá que la T-condicionalidad depende de la familia de t-normas a la que pertenece la t-norma T considerada.

Por lo que respecta a la T-condicionalidad de las S-implicaciones y de las QM-implicaciones, ya en [41] y [44] se hizo un estudio para cualquier t-norma T continua. En los citados artículos se demuestra directamente que las S-implicaciones y las QM-implicaciones son funciones de implicación que no son T-condicionales para ninguna t-norma de la familia del producto ni para el mínimo. Ahora bien, aplicando el teorema 46 se puede llegar más rápidamente al mismo resultado.

Corolario 54 *Sea S una t-conorma y $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una negación. Para ninguna t-norma $T \in \mathcal{F}(Prod)$ es la S-implicación $S(N(x), y)$ un T-condicional.*

Demostración. Basta comprobar que para todo $x \in (0,1)$ es $J(x,0) = S(N(x), 0) = N(x) \neq 0$ y aplicar el teorema 46. ■

Trivialmente $Prod \in \mathcal{F}(Prod)$ y por tanto la S-implicación $S(N(x), y)$ no es $Prod$-condicional. Entonces $S(N(x), y)$ no es T-condicional para ninguna $T \geq Prod$, y en particular $S(N(x), y)$ tampoco es Min-condicional.

Análogamente

Corolario 55 *Sea S una t-conorma, T_1 una t-norma y $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una negación. Para ninguna t-norma $T \in \mathcal{F}(Prod)$ es el QM-operador $S(N(x), T_1(x,y))$ un T-condicional.*

Demostración. De igual manera que en el caso anterior para todo $x \in (0,1)$ es $J(x,0) = S(N(x), T_1(x,0)) = S(N(x), 0) = N(x) \neq 0$ y se aplica el teorema 46. ■

Por lo tanto la QM-implicación $S(N(x), T_1(x,y))$ no es $Prod$-condicional. y como consecuencia $S(N(x), T_1(x,y))$ no es T-condicional para ninguna $T \geq Prod$. En particular $S(N(x), y)$ tampoco es Min-condicional.

De la misma forma

Corolario 56 *Sea S una t-conorma, T_1 una t-norma y $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una negación. Para ninguna t-norma $T \in \mathcal{F}(Prod)$ es el operador material extendido $S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x,y))$ un T-condicional.*

Demostración. De igual manera que en el caso anterior para todo $x \in (0,1)$ es $J(x,0) = S(T_1[N(x), S(0, N(0))], T_1(x,0)) = S(T_1[N(x), 1], 0) = S(N(x), 0) = N(x) \neq 0$ y se aplica el teorema 46. ■

Se estudiará ahora, tanto para las S-implicaciones, las QM-implicaciones como para los operadores materiales extendidos, el caso de que la t-norma T considerada sea de la familia de t-normas de Łukasiewicz.

Teorema 57 *Sea $T = W_\varphi \in \mathcal{F}(W)$ donde $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es un automorfismo de orden. Si N es una negación tal que existe x_0 con $N(x_0) > N_\varphi(x_0)$ entonces la S-implicación $S(N(x), y)$ no es T-condicional.*

Demostración. Sea x_0 tal que $N(x_0) > \varphi^{-1}(1 - \varphi(x_0))$, lo que es equivalente a $\varphi(x_0) + \varphi(N(x_0)) - 1 > 0$, y si $y = 0$ se tiene

$$T\left(x_0, S\left(N\left(x_0\right), y\right)\right) = T\left(x_0, N\left(x_0\right)\right) = \varphi^{-1} \circ W\left(\varphi\left(x_0\right), \varphi\left(N\left(x_0\right)\right)\right) =$$
$$\varphi^{-1}\left(\max\left(0, \varphi\left(x_0\right) + \varphi\left(N\left(x_0\right)\right) - 1\right)\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(x_0\right) + \varphi\left(N\left(x_0\right)\right) - 1\right) > 0$$

Entonces para $y = 0$ es $T\left(x_0, S\left(N\left(x_0\right), y\right)\right) > 0 = y$, es decir la S-implicación $S\left(N\left(x\right), y\right)$ no es T-condicional. ■

Nota 58 *La condición $N\left(x\right) > N_\varphi\left(x\right)$ da una cota para aquellas negaciones que verifican el teorema anterior.*

Corolario 59 *Si N es una negación de tal manera que existe x_0 con $N\left(x_0\right) > N_\varphi\left(x_0\right)$ entonces la S-implicación $S\left(N\left(x\right), y\right)$ no es T-condicional para ninguna $T \geq W_\varphi$.*

Teorema 60 *Sea $T = W_\varphi \in \mathcal{F}\left(W\right)$ donde $\varphi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es un automorfismo de orden. Si N es una negación de tal manera que existe x_0 con $N\left(x_0\right) > N_\varphi\left(x_0\right)$ entonces el QM-operador $S\left(N\left(x\right), T_1\left(x, y\right)\right)$ no es T-condicional.*

Demostración. Tomando x_0 tal que $N\left(x_0\right) > N_\varphi\left(x_0\right)$ e $y = 0$ se llega a la desigualdad

$$T\left(x_0, S\left(N\left(x_0\right), T_1\left(x_0, y\right)\right)\right) = T\left(x_0, N\left(x_0\right)\right) =$$
$$\varphi^{-1}\left[W\left(\varphi\left(x_0\right), \varphi\left(N\left(x_0\right)\right)\right)\right] > 0 = y$$

es decir, la QM-implicación $S\left(N\left(x\right), T_1\left(x, y\right)\right)$ no es T-condicional. ■

Teorema 61 *Sea $T = W_\varphi \in \mathcal{F}\left(W\right)$ donde $\varphi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es un automorfismo de orden y N una negación tal que $N \leq N_\varphi$. Entonces para cualquier t-conorma $S \leq W_\varphi^*$, la S-implicación $S\left(N\left(x\right), y\right)$ es T-condicional.*

Demostración. Como $S \leq W_\varphi^*$ operando se tiene que

$$T(x, S(N(x), y)) \leq T\left(x, \varphi^{-1} \circ W^*(\varphi(N(x)), \varphi(y))\right) =$$
$$T\left(x, \varphi^{-1} \circ Min(1, \varphi(N(x)) + \varphi(y))\right) =$$
$$\varphi^{-1} \circ W(\varphi(x), Min(1, \varphi(N(x)) + \varphi(y)))$$

Puesto que $N(x) \leq N_{\varphi}(x)$ sucede que

$$T(x, S(N(x), y)) \leq \varphi^{-1} \circ W(\varphi(x), Min(1, \varphi(N(x)) + \varphi(y))) \leq$$
$$\varphi^{-1}(Max(0, Min(\varphi(x), \varphi(y)))) \leq \varphi^{-1}\varphi(y) = y$$

y se tiene que la S-implicación $S(N(x), y)$ es T-condicional. ■

Nota 62 *Se puede probar fácilmente que* $W_{\varphi}^* = \varphi^{-1} \circ W^* \circ (\varphi \times \varphi)$ *es la t-conorma dual de la t-norma* T *con respecto a la negación* N_{φ}*.*

Corolario 63 *Sean* $T = W_{\varphi} \in \mathcal{F}(W)$ *donde* $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es un automorfismo de orden y* N *una negación tal que* $N \leq N_{\varphi}$*. Entonces, el* QM*-operador* $S(N(x), T_1(x,y))$ *es* T*-condicional, para la t-norma continua* $T = W_{\varphi}$*, para cualquier t-conorma* $S \leq \varphi^{-1} \circ W^* \circ (\varphi \times \varphi) = W_{\varphi}^*$ *y cualquiera que sea* T_1*.*

Demostración. Por propiedades de las t-normas y aplicando el teorema anterior es

$$T(x, S(N(x), T_1(x,y))) \leq T(x, S(N(x), y)) \leq y$$

Así el QM-operador $S(N(x), T_1(x,y))$ considerado es T-condicional. ■

Corolario 64 *Sea* $T = W_{\varphi} \in \mathcal{F}(W)$ *donde* $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es un automorfismo de orden y* N *una negación tal que* $N \leq N_{\varphi}$*. Entonces para cualquier t-conorma* $S \leq \varphi^{-1} \circ W^* \circ (\varphi \times \varphi) = W_{\varphi}^*$*, el operador material extendido* $S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x,y))$ *es* T*-condicional, para la t-norma continua* $T = W_{\varphi}$ *y cualquiera que sea* T_1*.*

Demostración. Por propiedades de las t-normas y aplicando el teorema anterior es

$T\{x, S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x,y))\} \leq T\{x, S(N(x), T_1(x,y))\} \leq$

$T(x, S(N(x), y)) \leq y$

Así el operador material extendido $S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x,y))$ considerado es T-condicional. ■

Teorema 65 *La S-implicación $J(x,y) = S(1-x, y)$ es W-condicional si y sólo si la t-conorma S es tal que $S \leq W^*$.*

Demostración. Para la necesidad se usará reducción al absurdo. Por tanto se supondrá que $S \nleq W^*$, es decir, se supondrá que existen $x_0, y_0 \in [0,1]$ tal que $S(x_0, y_0) > W^*(x_0, y_0) = Min(1, x_0 + y_0)$.

Si $Min(1, x_0 + y_0) = 1$ es $S(x_0, y_0) > 1$, que es imposible puesto que S es una t-conorma. Entonces $S(x_0, y_0) > x_0 + y_0$. Además es $x_0 + y_0 < 1$ o, equivalentemente, $y_0 < 1 - x_0$. Por tanto

$$W(1-x_0, J(1-x_0, y_0)) = W(1-x_0, S(x_0, y_0)) > W(1-x_0, x_0+y_0) =$$
$$Max(0, 1-x_0+(x_0+y_0)-1) = Max(0, y_0) = y_0$$

es decir J no es W-condicional. Absurdo.

La condición suficiente se deduce inmediatamente del teorema anterior tomando $\varphi = id$ y $N(x) = 1 - x$. ■

Teorema 66 *El QM-operador $J(x,y) = S(1-x, Min(x,y))$ es W-condicional si y sólo si la t-conorma S es tal que $S \leq W^*$.*

Demostración. Para la necesidad se usará reducción al absurdo. Por tanto se supondrá que $S \nleq W^*$, es decir, se supondrá que existen $x_0, y_0 \in [0,1]$ tal que $S(x_0, y_0) > W^*(x_0, y_0) = Min(1, x_0 + y_0)$.

Si $Min\,(1, x_0 + y_0) = 1$ es $S\,(x_0, y_0) > 1$, que es imposible puesto que S es una t-conorma. Entonces $S\,(x_0, y_0) > x_0 + y_0$. Además es $x_0 + y_0 < 1$ o, equivalentemente, $y_0 < 1 - x_0$. Por tanto

$$W\,(1 - x_0, J\,(1 - x_0, y_0)) = W\,(1 - x_0, S\,(x_0, Min\,(1 - x_0, y_0))) =$$
$$W\,(1 - x_0, S\,(x_0, y_0)) = Max\,(0, 1 - x_0 + S\,(x_0, y_0) - 1) =$$
$$Max\,(0, S\,(x_0, y_0) - x_0) \geq S\,(x_0, y_0) - x_0 > x_0 + y_0 - x_0 = y_0$$

es decir J no es W-condicional. Absurdo.

La condición suficiente se deduce del corolario 63 tomando $\varphi = id$ y $N\,(x) = 1 - x$. ■

Teorema 67 *$S\,(Min\,[1 - x, S\,(y, 1 - y)]\,, Min\,(x, y))$, operador material extendido, es W-condicional si y sólo si la t-conorma S es tal que $S \leq W^*$.*

Demostración. Para la necesidad se usará reducción al absurdo. Por tanto se supondrá que $S \nleq W^*$, es decir, se supondrá que existen $x_0, y_0 \in [0, 1]$ tal que $S\,(x_0, y_0) > W^*\,(x_0, y_0) = Min\,(1, x_0 + y_0)$.

Si $Min\,(1, x_0 + y_0) = 1$ es $S\,(x_0, y_0) > 1$, que es imposible puesto que S es una t-conorma. Entonces $S\,(x_0, y_0) > x_0 + y_0$. Además es $x_0 + y_0 < 1$. Por tanto

$$W\,(1 - x_0, J\,(1 - x_0, y_0)) =$$

$$W\,\{1 - x_0, S\,(Min\,[x_0, S\,(y_0, 1 - y_0)]\,, Min\,(1 - x_0, y_0))\} \geq$$

$$W\,\{1 - x_0, S\,(Min\,[x_0, 1 - y_0]\,, Min\,(1 - x_0, y_0))\}$$

Como $x_0 + y_0 < 1$ es $y_0 < 1 - x_0$ y también $x_0 < 1 - y_0$. Entonces

$$W\,(1 - x_0, J\,(1 - x_0, y_0)) \geq$$

$$W\,\{1 - x_0, S\,(Min\,[x_0, 1 - y_0]\,, Min\,(1 - x_0, y_0))\} =$$

$$W\,\{1 - x_0, S\,(x_0, y_0)\}$$

Por ello, procediendo de manera análoga al teorema anterior se tiene que

$W(1-x_0, J(1-x_0,y_0)) \geq W\{1-x_0, S(x_0,y_0)\} =$

$Max(0, 1-x_0+S(x_0,y_0)-1) = Max(0, S(x_0,y_0)-x_0) \geq$

$S(x_0,y_0)-x_0 > x_0+y_0-x_0 = y_0$

es decir J no es W-condicional. Absurdo.

La condición suficiente se deduce del corolario 64 tomando $\varphi = id$ y $N(x) = 1-x$. ■

Se demuestra en primer lugar un lema que facilitará en gran medida la prueba del teorema que aparecerá a continuación.

Lema 68 *Sea T una t-norma continua por la izquierda y T_1 la t-norma de $\mathcal{F}(T)$ dada por $T_1 = T_\varphi$ donde φ es un automorfismo de orden en $[0,1]$. Entonces $J^{T_1}(x,y) = \varphi^{-1}\left(J^T(\varphi(x), \varphi(y))\right)$.*

Demostración. Utilizando la definición de la implicación residuada respecto a una t-norma se tiene que

$$J^{T_1}(x,y) = \sup\{z; T_1(z,x) \leq y\} = \sup\{z; \varphi^{-1}(T(\varphi(z), \varphi(x))) \leq y\} =$$
$$\sup\{z; T(\varphi(z), \varphi(x)) \leq \varphi(y)\} = \varphi^{-1}\left(J^T(\varphi(x), \varphi(y))\right). \blacksquare$$

Teorema 69 *Sea φ un automorfismo en $([0,1], \leq)$, N_φ la negación generada por φ, T la t-norma $T = Prod_\varphi$ y S la t-conorma dada por $S = Prod^*_\varphi$. Entonces $S(N_\varphi(x), T(x,y)) \leq J^{W_\varphi}(x,y)$ donde W_φ es la t-norma de la familia de Łukasiewicz dada por $W_\varphi = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$.*

Demostración. Por el teorema 65 se sabe que $Prod^*(1-x, Prod(x,y))$ es W-condicional, es decir, $Prod^*(1-x, Prod(x,y)) \leq J^W(x,y)$ para todo x, y. Por tanto

$$Prod^{*}\left(1-\varphi\left(x\right),Prod\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)\right)\leq J^{W}\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)$$

O, equivalentemente,

$$\varphi^{-1}\left[Prod^{*}\left(1-\varphi\left(x\right),Prod\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)\right)\right]\leq\varphi^{-1}\left[J^{W}\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)\right]$$

De donde, aplicando el lema anterior, se tiene que

$$\varphi^{-1}\left[Prod^{*}\left(1-\varphi\left(x\right),Prod\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)\right)\right]\leq J^{W_{\varphi}}\left(x,y\right)$$

Pero por otro lado, siendo $S=\varphi^{-1}\circ Prod^{*}\circ(\varphi\times\varphi)$ o bien $S\circ(\varphi^{-1}\times\varphi^{-1})=\varphi^{-1}\circ Prod^{*}$, se llega a que

$$\begin{gathered}\varphi^{-1}\left[Prod^{*}\left(1-\varphi\left(x\right),Prod\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)\right)\right]=\\ S\left[\varphi^{-1}\left(1-\varphi\left(x\right)\right),\varphi^{-1}\left(Prod\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)\right)\right]=S\left(N_{\varphi}\left(x\right),T\left(x,y\right)\right)\end{gathered}$$

y entonces $S\left(N_{\varphi}\left(x\right),T\left(x,y\right)\right)\leq J^{W_{\varphi}}\left(x,y\right)$. ■

Nota 70 *Se obtendrían resultados totalmente análogos considerando los casos siguientes*

- $T=Prod_{\varphi}$ *y* $S=W_{\varphi}^{*}$.
- $T=W_{\varphi}$ *y* $S=Prod_{\varphi}^{*}$.
- $T=W_{\varphi}$ *y* $S=W_{\varphi}^{*}$.

Pero evidentemente el estudio queda abierto para aquellas J que no son ni S-implicaciones, ni QM-operadores ni operadores materiales extendidos. Respecto a la implicación exponencial, el teorema no puede ser aplicado ya que para todo $x>0$ es $E\left(x,0\right)=0^{x}=0$. Sin embargo se tienen los siguientes resultados

Teorema 71 *E no es $Prod$-condicional.*

Demostración. Si E fuese $Prod$-condicional se tendría que verificar la desigualdad $Prod\,(x, E\,(x,y)) \leq y$ para todo x, $y \in [0,1]$. Como contraejemplo basta tomar $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{9}$, y se tiene que

$$Prod\,(x, E\,(x,y)) = x \cdot E\,(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} > \frac{1}{9}$$

Es decir, la implicación exponencial no es un $Prod$-condicional. ∎

Nota 72 *Se debe hacer notar que como la implicación exponencial no es un $Prod$-condicional, tampoco es un Min-condicional.*

Teorema 73 *Sea $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un automorfismo de orden tal que $\varphi\,(x \cdot y) \leq \varphi\,(x) \cdot \varphi\,(y)$. Entonces E no es $Prod_\varphi$-condicional.*

Demostración. Supongamos que E es $Prod_\varphi$-condicional con $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un automorfismo de orden tal que $\varphi\,(x \cdot y) \leq \varphi\,(x) \cdot \varphi\,(y)$. Entonces es $Prod_\varphi\,(x, E\,(x,y)) \leq y$ para todo x, $y \in [0,1]$, es decir

$$T\,(x, E\,(x,y)) = [\varphi^{-1} \circ Prod \circ (\varphi \times \varphi)]\,(x, E\,(x,y)) =$$

$$\varphi^{-1}\,(\varphi\,(x) \cdot \varphi\,(y^x)) \leq y$$

Pero como $\varphi\,(x \cdot y) \leq \varphi\,(x) \cdot \varphi\,(y)$ se tiene que

$$\varphi^{-1}\,(\varphi\,(x \cdot y^x)) \leq \varphi^{-1}\,(\varphi\,(x) \cdot \varphi\,(y^x)) \leq y$$

Así es $x \cdot y^x \leq y$ para todo x, $y \in [0,1]$, lo que se contradice con el teorema anterior. Por tanto E no es $Prod_\varphi$-condicional. ∎

Un ejemplo de automorfismos de orden que verifican $\varphi\,(x \cdot y) \leq \varphi\,(x) \cdot \varphi\,(y)$ viene dado por la familia $\varphi\,(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Queda sin embargo abierto el problema para otras expresiones de φ que no verifiquen la citada condición.

Respecto a las t-normas pertenecientes a la familia de Łukasiewicz, no se puede afirmar nada de manera general. Existen t-normas para las que la implicación exponencial es T-condicional y otras para las que no. Por ejemplo, si se considera la familia W_φ donde $\varphi(x) = x^\alpha$ para $\alpha > 0$, se tiene lo siguiente.

Teorema 74 *Si $T = W_\varphi$, donde $\varphi(x) = x^\alpha$, $\alpha \geq 1$, entonces la implicación exponencial es T-condicional.*

Demostración. Se tiene que probar que para todo x, y en $[0,1]$ se verifica la desigualdad $W_\varphi(x, E(x,y)) \leq y$, es decir, que se verifica $\varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(x) + \varphi(y^x) - 1) \leq y$. Esto es equivalente a comprobar la expresión $Max(0, \varphi(x) + \varphi(y^x) - 1) \leq \varphi(y)$. Como siempre es $0 \leq \varphi(y)$, si se consigue demostrar que $\varphi(x) + \varphi(y^x) - 1 \leq \varphi(y)$ ya estaría justificado.

Considérese para cualquier y en $[0,1]$ la función $f_y(x) = \varphi(x) + \varphi(y^x) - 1 = x^\alpha + (y^x)^\alpha - 1$. La finalidad de lo que sigue es comprobar que el máximo en $[0,1]$ de cada función f_y está en el punto $x = 1$.

a) Si $y = 0$, $f_0(x) = x^\alpha - 1$ si $x \neq 0$ y $f_0(0) = 0$. $f_0(x) = x^\alpha - 1$ es una función estrictamente creciente en $(0,1]$, por tanto el máximo se alcanza en $x = 1$. Ahora bien $f_0(1) = 1 - 1 = 0 = f_0(0)$. Por tanto la función f_0 alcanza el máximo en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

b) Si $y \neq 0$ e $y \neq 1$, la función f_y es continua y derivable y su derivada es $f_y'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} + \alpha \cdot (y^x)^\alpha \cdot \ln y$ y si se iguala a cero se obtiene el posible candidato a óptimo. La segunda derivada es $f_y''(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2} + \alpha^2 \cdot (y^x)^\alpha \cdot \ln^2 y$, que es siempre positiva; es decir, el punto obtenido es un mínimo y, por lo tanto, el máximo se alcanza en uno de los extremos del intervalo. Ahora bien es $f_y(0) = 0$ y $f_y(1) = y^\alpha$, por lo que el máximo se alcanza en $x = 1$.

c) Si $y = 1$, es $f_y(x) = x^\alpha$ y el máximo, al ser creciente, se alcanza en el punto $x = 1$.

Entonces para todo y en $[0,1]$, es $f_y(x) \leq f_y(1)$; es decir, que es

$\varphi(x) + \varphi(y^x) - 1 = x^\alpha + (y^x)^\alpha - 1 = f_y(x) \leq f_y(1) = y^\alpha = \varphi(y)$

Por tanto es $Max(0, \varphi(x) + \varphi(y^x) - 1) \leq \varphi(y)$, o lo que es lo mismo, $\varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(x) + \varphi(y^x) - 1) \leq y$. Así pues la implicación exponencial es un W_φ-condicional. ■

Nota 75 *Se debe resaltar el hecho de que si se toma $\alpha = 1$, es $\varphi = id_{[0,1]}$ y por tanto se deduce que la implicación exponencial es W-condicional.*

En el caso de que se considere $T = W_\varphi$, donde $\varphi(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, la implicación exponencial no es, en general, T-condicional. Por ejemplo si se toma $\alpha = \frac{1}{2}$, $x = 0,05$ e $y = \frac{1}{400}$ se tiene que

$W_\varphi(x, E(x,y)) = \varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(x) + \varphi(y^x) - 1) =$

$[Max(0, \sqrt{x} + \sqrt{y^x} - 1)]^2 = (8.449\,8 \times 10^{-2})^2 = 0,007139\,9 >$

$0,00\,25 = \frac{1}{400} = y$

Queda abierto el problema para otras t-normas de la familia de Łukasiewicz.

Se ha visto hasta ahora que para cualquier función de implicación $x' + y$ considerada se encuentra al menos una t-norma continua T para la que es T-condicional. La pregunta que surge de manera inmediata es si cualquier función de implicación material es T-condicional para alguna t-norma T. La respuesta, que es negativa, viene dada por el siguiente contraejemplo.

El operador J definido por

$$J(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y, & \text{si } x = 1 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

es una función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$, pero no es T-condicional para ninguna t-norma T. Ciertamente, para todo $x > y$ tal que $x \neq 1$ resulta $J(x,y) = 1$, por lo que según el teorema 48 la función de implicación definida no es T-condicional para ninguna t-norma T.

Ejemplos

1. $J(x,y) = Min(1, 1 - x + y)$

   Como $J = J^W$ y, por el teorema 53, es T-condicional para toda t-norma $T \leq W$.

2. $J(x,y) = Max(1 - x, y)$

   J es una S-implicación, es decir, un operador de la forma $S(N(x), y)$ con S una t-conorma y N una función de negación. En este caso $S = Max$ y $N = 1 - i$. Por tanto sabemos de manera inmediata, por el teorema 65, que J es T-condicional para toda t-norma $T \leq W$.

3. $J(x,y) = Max(1 - x, Min(x,y))$

   Es un QM-operador, es decir un operador de la forma $S(N(x), T(x,y))$ donde $S = Max$, $T = Min$ y $N = 1 - i$. Como $Max \leq S$ para toda $S \in \mathcal{F}(W^*)$, por el teorema 66, J es T-condicional para toda $T \in \mathcal{F}(W)$.

4. $J(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$

   J es una S-implicación, en concreto $J_{39} = Z^*(1 - x, y)$, pero no es T-condicional para ninguna t-norma T. Para demostrarlo veremos que no es Z-condicional. Tomemos $x = 0,5$ e $y = 0,25$. Entonces

   $Z(x, J(x,y)) = Z(x,1) = x = 0,5 > 0,25 = y$

es decir, J no es Z-condicional y entonces J no es T-condicional para ninguna t-norma T.

4.1.2 Funciones de implicación producto

Respecto a las funciones de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ el problema de la condicionalidad se resuelve totalmente en el siguiente resultado

Teorema 76 *Toda función de implicación $FI_{x\cdot y}$ es T-condicional para cualquier t-norma T.*

Demostración. Sea J una función de implicación $\mathrm{FI}_{x\cdot y}$ arbitraria. Entonces por ser creciente en la primera variable, junto con las condiciones frontera, se tiene que $J(x,y) \leq J(1,y) = y$, y por tanto para cualquier t-norma T se verifica la desigualdad $T(x, J(x,y)) \leq J(x,y) \leq y$. ■

Dada una t-norma T y dos aplicaciones $A, B : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ crecientes tal que $A(0) = B(0) = 0$ y $A(1) = B(1) = 1$, los operadores de Mandani-Larsen definidos de la forma $J(x,y) = T(A(x), B(y))$ no son en todos los casos condicionales, sino únicamente cuando el automorfismo B es contractivo, lo que se demuestra en el siguiente

Teorema 77 *Un operador de Mandani-Larsen definido de la forma $J(x,y) = T(A(x), B(y))$, con $A, B : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ crecientes tal que $A(0) = B(0) = 0$ y $A(1) = B(1) = 1$ y T una t-norma es T_1-condicional para alguna t-norma T_1 si y sólo si $B(y) \leq y$.*

Demostración. Si el operador J tipo Mandani-Larsen es T_1-condicional para alguna t-norma T_1 es $T_1(x, J(x,y)) \leq y$ para todo x, y. En concreto para $x = 1$ sería

$T_1(x, J(x,y)) = T_1(1, T(A(1), B(y))) = B(y) \leq y$

es decir $B(y) \leq y$.

La suficiencia se demuestra de manera inmediata puesto que cualquier t-norma T_1 es tal que $T_1 \leq Min$. ■

Se debe hacer notar que de la demostración del teorema anterior también se deduce que si un operador Mandani-Larsen es T-condicional para alguna t-norma T lo es para cualquiera.

4.1.3 Funciones de implicación proyección

El problema de la condicionalidad para las funciones de implicación FI_y se resuelve totalmente en el siguiente

Teorema 78 *Una función de implicación proyección J es T-condicional si y sólo si $J(x,y) \leq y$ para todo x, y en $[0,1]$.*

Demostración. "$\Leftarrow$" Si $J(x,y) \leq y$ trivialmente, para cualquier t-norma T es

$T(x, J(x,y)) \leq T(x,y) \leq y$

es decir, J es T condicional.

"$\Rightarrow$" Si J es T-condicional para cualesquiera x, y en $[0,1]$ es $T(x, J(x,y)) \leq y$. En concreto para $x = 1$ es

$T(1, J(1,y)) \leq y$

Pero como J es una función de implicación FI_y para cualquier x se verifica que $J(x,y) = J(1,y)$ y entonces

$T(1, J(x,y)) = T(1, J(1,y)) \leq y$

Ahora bien, como $T(1, J(x,y)) = J(x,y)$ es $J(x,y) \leq y$. ■

Ejemplos

1. $J(x,y) = \sqrt{y}$

   Como $J(x,y) \leq y$ para todo x,$y \in [0,1]$, J es T-condicional para cualquier t-norma T.

2. $J(x,y) = sen\dfrac{\pi}{2}y$

   Teniendo en cuenta el teorema anterior y ya que $J(x,y) > y$ para todo $y \in (0,1)$, se deduce que J no es T-condicional para ninguna t-norma T.

4.2 Modus Tollens

La Meta-Regla del Modus Ponens, usada para realizar encadenamiento hacia delante (*forward chaining*), se puede resumir en el esquema "$p \Rightarrow q$ y $p \in V$: $q \in V$". De forma similar, la Meta-Regla del Modus Tollens, usada para realizar encadenamiento hacia detrás (*backward chaining*), se puede expresar a través del siguiente esquema "$p \Rightarrow q$ y $q \notin V$: $p \notin V$". Ahora bien, si la relación $p \Rightarrow q$ representando al enunciado verdadero "*Si p, entonces q*" viene dada por la forma "$p \Rightarrow q$ si y sólo si $p \rightarrow q = 1$" para alguna implicación $\rightarrow$, ambas reglas se pueden resumir en las respectivas desigualdades $p \cdot (p \rightarrow q) \leq q$ y $q' \cdot (p \rightarrow q) \leq p'$. En el caso particular de un Álgebra de Boole ambas desigualdades son equivalentes, es decir, cualquier operación $\rightarrow$ verificando la primera de las desigualdades, la correspondiente a la regla del Modus Ponens, también verifica la correspondiente a la regla del Modus Tollens, y recíprocamente. Ahora bien, dicha equivalencia no se verifica en general en el caso de la Lógica Borrosa, por lo que se hace necesario considerar la siguiente definición

Definición 79 *Dado un universo de discurso E, una t-norma T y una función de negación $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, una relación borrosa $R : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ se dice que verifica la regla del Modus Tollens si para todo x, y de $[0,1]$ se verifica que $T(N(y), R(x,y)) \leq N(x)$.*

En general de toda relación verificando la regla del Modus Tollens para alguna t-norma T y alguna función de negación N se dirá que es un Modus Tollens condicional, o abreviadamente un MT-condicional.

Teorema 80 *Una operador H tal que $H(x,y) = 1$ para algún $x > y$ no es MT-condicional para ninguna t-norma T.*

Demostración. "$\Leftarrow$" Para la t-norma Z mínima es

$$Z(N(y), H(x,y)) = \begin{cases} N(y) & \text{si } H(x,y) = 1 \\ H(x,y) & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo que, si existen $x_0 > y_0$ verificando $H(x_0, y_0) = 1$, resulta ser $Z(N(y_0), H(x_0, y_0)) = N(y_0) > N(x_0)$ puesto que $x_0 > y_0$. Así pues como H no es MT-condicional para Z no lo es para ninguna otra t-norma. ■

Teorema 81 *Sea $H : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un operador para el que existe $b \in (0,1)$ tal que $H(1,b) > 0$. Si H es MT-condicional, entonces $T \in \mathcal{F}(W)$.*

Demostración. Si el operador H es MT-condicional se verifica que existe una t-norma T de tal forma que $T(N(b), H(a,b)) \leq N(a)$ para todo $a, b \in [0,1]$. Por tanto, para $a = 1$ se tiene que

$$T(N(b), H(a,b)) = T(N(b), H(1,b)) \leq N(a) = N(1) = 0$$

Así pues $T(N(b), H(1,b)) = 0$. Pero como $H(1,b) > 0$, necesariamente $T = W_\varphi$ o bien T es una suma ordinal de t-normas, siempre y cuando las t-normas consideradas para su construcción pertenezcan a la familia de Łukasiewicz, puesto que son las únicas con divisores de cero. Por ello escribimos $T \in \mathcal{F}(W)$. ■

Teorema 82 *Sea* $H : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *un operador. Si* H *es MT-condicional, entonces* $H(x,0) \leq N(x)$.

Demostración. Si H es MT-condicional necesariamente existe una t-norma T tal que para todo $x, y \in [0,1]$ es $T(N(y), H(x,y)) \leq N(x)$. En concreto, para $y = 0$ se tiene que $T(N(0), H(x,0)) \leq N(x)$, de donde, por propiedades de las t-normas, se llega a que $H(x,0) \leq N(x)$. ■

Utilizando los dos teoremas anteriores se deducen las siguientes caracterizaciones de la MT-condicionalidad para cada uno de los tipos de funciones de implicación estudiados.

4.2.1 Funciones de implicación materiales

Teorema 83 *Sea* $J : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación material. Si* J *es MT-condicional entonces* $T = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ *y* $N \leq N_\varphi$.

Demostración. Por definición es $J(1,y) = y > 0$, por lo que, necesariamente, según el teorema 81, si J es MT-condicional, entonces $T \in \mathcal{F}(W)$. Así pues

$$T(N(y), J(1,y)) = W_\varphi(N(y), y) = \varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(y) - 1)$$

Ahora bien, como J es MT-condicional, es $T(N(y), J(1,y)) \leq N(1) = 0$, para todo $y \in [0,1]$, por lo que $\varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(y) - 1) = 0$. De donde se tiene que $\varphi(N(y)) + \varphi(y) - 1 = 0$, es decir, $\varphi(N(y)) \leq 1 - \varphi(y)$, o lo que es lo mismo $N(y) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(y)) = N_\varphi(y)$ para todo $y \in [0,1]$.

■

El estudio de la condición suficiente se hace por separado para las R-implicaciones, las S-implicaciones, las QM-implicaciones y los operadores materiales extendidos motivado por las especiales características de cada una de ellos.

Lema 84 *Sea J^T una R-implicación. Si $T = W_\varphi$ y $N = N_\varphi$, entonces J^T es MT-condicional.*

Demostración. La demostración es un sencillo ejercicio únicamente teniendo en cuenta que $J^{W_\varphi} = \varphi^{-1} \circ J^W \circ (\varphi \times \varphi)$. ■

Teorema 85 *Una R-implicación J^T es MT-condicional si y sólo si $T = W_\varphi$ y $N = N_\varphi$.*

Demostración. Se deduce de manera inmediata de los dos resultados anteriores. ■

En el caso de las S-implicaciones las desigualdades del modus ponens y del modus tollens son equivalentes, puesto que si se verifica $T(a, S(N(a), b)) \leq b$ para todo $a, b \in [0,1]$, del cambio de variables $a = N(y)$, $b = N(x)$ se obtiene $T(N(y), S(y, N(x))) \leq N(x)$, es decir, $T(N(y), S(N(x), y)) \leq N(x)$ para todo $x, y \in [0,1]$. Y recíprocamente. Por tanto

Teorema 86 *Sea $T \in \mathcal{F}(W)$ y N una negación tal que $N(x) \leq N_\varphi(x)$ para cualquier $x \in [0,1]$. Entonces para cualquier t-conorma $S \leq W_\varphi^*$, la S-implicación $S(N(x), y)$ es MT-condicional.*

Demostración. Se deduce de manera inmediata de los resultados correspondientes a la verificación de la desigualdad del modus ponens. ■

Corolario 87 *Sea $T \in \mathcal{F}(W)$ y N una negación tal que $N(x) \leq N_\varphi(x)$ para cualquier $x \in [0,1]$. Entonces para cualquier t-conorma $S \leq W_\varphi^*$, la QM-implicación $S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x, y))$ es MT-condicional.*

Demostración. Se sigue del resultado anterior puesto que, por propiedades de las t-normas, es $S(N(x), T_1(x,y)) \leq S(N(x), y)$. ■

Corolario 88 *Sea* $T \in \mathcal{F}(W)$ *y* N *una negación tal que* $N(x) \leq N_\varphi(x)$ *para cualquier* $x \in [0,1]$*. Entonces para cualquier t-conorma* $S \leq W_\varphi^*$*, el operador material extendido* $S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x,y))$ *es MT-condicional.*

Demostración. Se sigue trivialmente del teorema anterior puesto que es $S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x,y)) \leq S(N(x), y)$. ■

4.2.2 Funciones de implicación producto

Teorema 89 *Sea* $J : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación producto.* J *es MT-condicional si y sólo si* $T = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ *y* $N \leq N_\varphi$*.*

Demostración. Veamos en primer lugar la necesidad. Puesto que por definición es $J(1,y) = y > 0$, según el teorema 81, si J es MT-condicional, entonces $T \in \mathcal{F}(W)$. Además, de manera análoga al caso de las implicaciones materiales, se tiene que $N(y) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(y)) = N_\varphi(y)$ para todo $y \in [0,1]$.

Respecto a la suficiencia y puesto que para una función de implicación producto es $J(x,y) \leq J(1,y) = y$, se tiene que

$T(N(y), J(x,y)) = \varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(J(x,y)) - 1) \leq \varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(y) - 1)$

Puesto que $N \leq N_\varphi$ es

$T(N(y), J(x,y)) \leq \varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(y) - 1) \leq$

$\varphi^{-1} \circ Max(0, 1 - \varphi(y) + \varphi(y) - 1) = \varphi^{-1}(0) = 0$

Así $T(N(y), J(x,y)) = 0 \leq N(x)$ para todo $x \in [0,1]$, es decir, J es MT-condicional. ■

4.2.3 Funciones de implicación proyección

Teorema 90 *Sea* $J : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación proyección tal que* $f(y) = J(1,y) > 0$ *para algún* $y \in (0,1)$. J *es MT-condicional si y sólo si* $T \in \mathcal{F}(W)$ *y* $N \leq N_\varphi \circ f$.

Demostración. Como por definición es $J(1,y) = f(y) > 0$ para algún $y \in (0,1)$, necesariamente, según el teorema 81, si J es MT-condicional, entonces $T \in \mathcal{F}(W)$. Además

$T(N(y), J(1,y)) = W_\varphi(N(y), f(y)) =$

$\varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(f(y)) - 1)$

Ahora bien, como J es MT-condicional, es $T(N(y), J(1,y)) \leq N(1) = 0$, para todo $y \in [0,1]$, por lo que $\varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(f(y)) - 1) = 0$. De donde se tiene que $\varphi(N(y)) + \varphi(f(y)) - 1 \leq 0$, es decir, $\varphi(N(y)) \leq 1 - \varphi(f(y))$, o lo que es lo mismo $N(y) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(f(y))) = N_\varphi \circ f(y)$ para todo $y \in [0,1]$.

Respecto a la suficiencia y ya que J es función de implicación proyección resulta ser $J(x,y) = J(1,y) = f(y)$ para todo x. Por tanto, teniendo en cuenta que $N \leq N_\varphi \circ f$ es

$T(N(y), J(x,y)) = W_\varphi(N(y), f(y)) =$

$\varphi^{-1} \circ Max(0, \varphi(N(y)) + \varphi(f(y)) - 1) \leq$

$\varphi^{-1} \circ Max(0, 1 - \varphi(f(y)) + \varphi(f(y)) - 1) = 0$

Así $T(N(y), J(x,y)) \leq N(x)$ para todo $x, y \in [0,1]$. Por ello, si $T \in \mathcal{F}(W)$ y $N \leq N_\varphi \circ f$ la función de implicación proyección siempre es MT-condicional. ■

Teorema 91 *Sea* $J : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación proyección tal que* $J(1,y) = 0$ *para todo* $y \in (0,1)$. *Entonces* J *es MT-condicional para* *cualquier t-norma y cualquier función de negación.*

Demostración. Si $y \in (0,1)$, dada una t-norma T y una función de negación N cualesquiera se tiene que para todo x es

$T(N(y), J(x,y)) = T(N(y), J(1,y)) = T(N(y), 0) = 0 \leq N(x)$

Si $y = 0$, como J es creciente en la segunda variable, es $J(x,0) \leq J(x,y) = 0$. Por tanto también, igual que en el caso anterior, para todo x es $T(N(y), J(x,y)) \leq N(x)$..

Si $y = 1$ resulta

$T(N(y), J(x,y)) = T(N(1), J(x,1)) = T(0, J(x,1)) = 0 \leq N(x)$ para todo x.

Por tanto $T(N(y), J(x,y)) \leq N(x)$ para todo x, y, es decir, J es MT-condicional para cualquier t-norma y cualquier función de negación. ■

4.3 Modus Ponens y Modus Tollens

La verificación simultánea de la desigualdad del Modus Ponens y del Modus Tollens es necesaria en el marco de la lógica borrosa para la correcta aplicación de la regla composicional de inferencia, dada por

$$\mu_{Q^*}(y) = \sup_{x \in X} T\left(\mu_{P^*}(x), J\left(\mu_P(x), \mu_Q(y)\right)\right)$$

para todo $y \in Y$ donde T es una t-norma continua. Si T es una t-norma que no verifica la desigualdad del Modus Ponens, se puede llegar a que $\mu_{P^*} = \mu_P$ pero μ_{Q^*} no coincida con μ_Q, lo que no es deseable. Análogamente si se considera la regla

$$\mu'_{p^*}(x) = \sup_{y \in Y} T\left(\mu'_{Q^*}(y), J\left(\mu_P(x), \mu_Q(y)\right)\right)$$

y la t-norma T no verifica la desigualdad del Modus Tollens, puede llevar a que μ'_{p^*} sea $\mu_\emptyset$ o bien μ_X.

Así pues sería deseable saber, para cada función de implicación, cuáles son las t-normas que verifican ambas desigualdades. En los resultados que aparecen en esta sección y que se deducen de las dos secciones previas, se caracterizan, para cada tipo de función de implicación estudiada a lo largo de esta memoria, las t-normas que verifican tanto la desigualdad del Modus Ponens como la desigualdad del Modus Tollens.

En lo que sigue y para hacer más sencilla su lectura, de una t-norma que verifica tanto la desigualdad del Modus Ponens como la desigualdad del Modus Tollens se dirá que es MPT-condicional al igual que se hace en [37].

4.3.1 Funciones de implicación materiales

Teorema 92 *Una R-implicación* J^T *es MPT-condicional si y sólo si* $T = W_\varphi$ *y* $N = N_\varphi$.

Teorema 93 *Sea* $T \in \mathcal{F}(W)$ *y* N *una negación tal que* $N(x) \leq N_\varphi(x)$ *para cualquier* $x \in [0,1]$. *Entonces para cualquier t-conorma* $S \leq W_\varphi^*$, *la* S*-implicación* $S(N(x), y)$ *es MPT-condicional.*

Teorema 94 *Sea* $T \in \mathcal{F}(W)$ *y* N *una negación tal que* $N(x) \leq N_\varphi(x)$ *para cualquier* $x \in [0,1]$. *Entonces para cualquier t-conorma* $S \leq W_\varphi^*$, *la* QM*-implicación* $S(N(x), T_1(x,y))$ *es MPT-condicional.*

Teorema 95 *Sea* $T \in \mathcal{F}(W)$ *y* N *una negación tal que* $N(x) \leq N_\varphi(x)$ *para cualquier* $x \in [0,1]$. *Entonces para cualquier t-conorma* $S \leq W_\varphi^*$, *el operador material extendido* $S(T_1[N(x), S(y, N(y))], T_1(x,y))$ *es MPT-condicional.*

4.3.2 Funciones de implicación producto

Teorema 96 *Sea* $J : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación producto. J es MPT-condicional si y sólo si* $T = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ *y* $N \leq N_\varphi$.

4.3.3 Funciones de implicación equivalencia

Teorema 97 *Una funcion de implicacion equivalencia J es MPT-condicional si* $T = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ *y* $N \leq N_\varphi$ *y para todo* $x > y$ *es* $J(x,y) \neq 1$.

4.3.4 Funciones de implicación proyección

Teorema 98 *Sea* $J : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación proyección tal que* $J(1,y) = f(y) > 0$ *para algún* $y \in (0,1)$. *J es MPT-condicional si y sólo si* $T \in \mathcal{F}(W)$, $N \leq N_\varphi \circ f$ *y* $f(y) \leq y$.

Teorema 99 *Sea* $J : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función de implicación proyección tal que* $J(1,y) = 0$ *para todo* $y \in (0,1)$, *entonces J es MPT-condicional.*

4.4 El caso de las funciones de implicación equivalencia

Se estudian de manera separada el caso de la condicionalidad de las funciones de implicación equivalencia puesto que no se han encontrado teoremas que caractericen la condicionalidad, ni para el Modus Ponens ni para el Modus Tollens. Por ello, en principio, son únicamente de aplicación los teoremas de carácter general. La única excepción la presentan las funciones de implicación equivalencia de la forma $J(x,y) = 1 - x - y + 2T(x,y)$, para cualquier t-norma T. En concreto se tiene

Teorema 100 *Sea T una t-norma. Entonces la función de implicación equivalencia $J(x,y) = 1 - x - y + 2T(x,y)$ es W-condicional.*

Demostración. Teniendo en cuenta que T es una t-norma se tiene que

$W(x, J(x,y)) = W(x, 1 - x - y + 2T(x,y)) =$

$Max(0, x + 1 - x - y + 2T(x,y) - 1) =$

$Max(0, 2T(x,y) - y) \leq y$

Así pues J es W-condicional. ■

Sin embargo se puede probar fácilmente, basta hacerlo para $y = 0$, que la implicación J no es condicional ni para la t-norma del mínimo ni para ninguna de la familia del producto.

Teorema 101 *Sea T una t-norma. Entonces la función de implicación equivalencia $J(x,y) = 1 - x - y + 2T(x,y)$ es MT-condicional para la t-norma de Łukasiewicz y la función de negación $N = 1 - id$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que T es una t-norma se tiene que

$W(N(y), J(x,y)) = W(1 - y, 1 - x - y + 2T(x,y)) =$

$Max(0, 1 - y + 1 - x - y + 2T(x,y) - 1) =$

$Max(0, 1 - x + 2(T(x,y) - y)) \leq Max(0, 1 - x) = 1 - x = N(x)$

Así pues J es MT-condicional para la t-norma de Łukasiewicz y la función de negación $N = 1 - id$. ■

El resto de los casos de funciones de implicación equivalencia, se deben estudiar de forma individual.

Ejemplos

1. $J(x,y) = 1 - |x - y|$

Se tiene que

- $J(0,0) = 1$

- $J(x,1) = 1 - |x-1| = 1 - 1 + x = x$ para todo x.

- $J(x,y) = J_{E2}(y,x)$ por definición.

Se prueba fácilmente que la implicación $J(x,y) = 1 - |x-y|$ no es ni Min-condicional ni $Prod$-condicional, pero sin embargo sí es condicional respecto a la t-norma de Łukasiewicz.

Respecto a la MT-condicionalidad, del teorema 80 se sigue que J es MT-condicional para alguna t-norma y alguna función de negación puesto que $J(x,y) = 1$ si y sólo si $x = y$. Además, teniendo en cuenta que $J(1,y) = y > 0$ se deduce del teorema 81 que J es MT-condicional respecto a una t-norma de la familia de Łukasiewicz. De hecho, tomando $T = W$ y $N(x) = 1 - x$ se tiene que

$W(N(y), J(x,y)) = Max(0, 1 - y + 1 - Max(x-y, y-x) - 1) =$

$Max(0, Min(1 - x + y - y, 1 - y + x - y)) =$

$Max(0, Min(1 - x, 1 - 2y + x)) =$

$Min(1 - x, 1 - 2y + x) \leq 1 - x = N(x)$

es decir, J es MT-condicional.

2. $J(x,y) = 1 - x - y + 2xy$

Trivialmente $J(x,y) = 1 - x - y + 2xy = 1 - x - y + 2Prod(x,y)$, por lo que, según el teorema 41, es función de implicación equivalencia. Además, según el terorema 100 anterior, J es W-condicional y según el teorema 101 es también MT-condicional para la t-norma de Łukasiewicz y la función de negación $N = 1 - id$.

3. $J(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ x & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = \dfrac{3}{4} \text{ e } y = \dfrac{1}{2} \text{ ó } x = \dfrac{1}{2} \text{ e } y = \dfrac{3}{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   Claramente, según el teorema 48, la implicación equivalencia definida no es T-condicional para ninguna t-norma puesto que para $x = \dfrac{3}{4}$ e $y = \dfrac{1}{2}$ es $J(x,y) = 1$, y por lo tanto, según el teorema 80 tampoco es MT-condicional.

4.5 Implicación vs. condicionalidad

Como ya se ha comentado anteriormente, este capítulo se dedica fundamentalmente al estudio de la relación existente entre el concepto de condicionalidad y los nuevos modelos de funciones de implicación. Se resumen a continuación los resultados más importantes de la condicionalidad para los distintos tipos de funciones de implicación definidas en esta memoria.

Dentro de las implicaciones materiales tienen gran importancia las R-implicaciones de las que ya se sabía que son T-condicionales para toda t-norma T menor o igual que la t-norma generadora de la R-implicación. Se prueba que dicha condición es también suficiente. Para el resto de las funciones de implicación material estudiadas, las S-implicaciones, los QM-operadores y los operadores materiales extendidos, se encuentran condiciones necesarias para que exista alguna t-norma respecto a la que sean T-condicionales y condiciones suficientes para algunos casos concretos.

Para las funciones de implicación producto se concluye que son siempre T-condicionales y además para cualquier t-norma T considerada.

Y por último las funciones de implicación proyección son T-condicionales, siendo T una t-norma, si y sólo si el operador J verifica $J(x, y) \leq y$. En tal caso, además, es T-condicional para cualquier t-norma T.

La MT-condicionalidad viene marcada por la necesidad, para los cuatro tipos de funciones de implicación, de que la t-norma considerada sea de la familia de Łukasiewicz ($T = W_\varphi$) y que la negación sea menor o igual que la generada por φ ($N \leq N_\varphi$). La única salvedad es la exigida por la condición $N \leq N_\varphi \circ f$, con $J(1, y) = f(y)$ para las funciones de implicación proyección.

Dentro de las funciones de implicación materiales, la condición citada es suficiente para las R-implicaciones. Para el caso de las S-implicaciones, los QM-operadores y los operadores materiales extendidos sólo sucede en el caso de que la t-conorma a partir de la que se construyen sea tal que $S \leq W^*_\varphi$. Para las funciones de implicación producto y proyección las condiciones necesarias son también suficientes.

Únicamente en el caso de las funciones de implicación equivalencia no se han encontrado condiciones suficientes ni para la MP-condicionalidad ni para la MT-condicionalidad.

Capítulo 5

Estudio de operadores de implicación

5.1 Introducción

La expresión final de la Regla Composicional de Inferencia para los Sistemas Basados en Reglas Difusas manifiesta su estrecha dependencia de los operadores de conjunción e implicación. En la literatura especializada se proponen una extensa variedad de operadores que pueden ser utilizados como operadores de implicación en el proceso de inferencia para modelado y control difuso. Han sido muchos los autores que analizan varios operadores de implicación tales como: las implicaciones introducidas a partir de los sistemas de la lógica multivaluada [31], las funciones de implicación [46], [47], [28], las t-normas [30], [20], [21] y un amplio grupo de otros tipos de operadores de implicación no pertenecientes a ninguna familia de las citadas. Por ejemplo en [24] se reúnen más de treinta operadores de implicación y se estudia su precisión en el control difuso de un motor de corriente continua, y en [8] y [9] se define una nueva metodología para la comparación y se analiza el comportamiento de los operadores empleados utilizándolos en el modelado difuso de diferentes funciones matemáticas.

Se pretende en este capítulo estudiar, de acuerdo a la clasificación desarrollada a lo largo de los capítulos anteriores, los operadores susceptibles de ser utilizados como operadores de implicación en los procesos de inferencia tanto para modelado como para control difuso. Para ello en la presente memoria se han recopilado los operadores borrosos más comúnmente usados y citados en literatura, y se han clasificado atendiendo a la familia de implicaciones a la cual pertenecen, procurando subsanar los errores cometidos en el pasado en el estudio de algunos de ellos. Más concretamente se podrá observar que algunos de ellos no son realmente funciones de implicación a pesar del uso que se les da y la denominación recibida por parte de sus usuarios, por lo que no se garantiza la fiabilidad de los resultados al realizar inferencia borrosa con ellos.

Ahora bien, para conseguir una mayor legibilidad de este capítulo y teniendo en cuenta que el número de operadores de implicación estudiados es muy elevado, se ha preferido estructurar el capítulo de forma que los operadores aparezcan agrupados en secciones según las condiciones frontera que verifican y al final de cada sección se presenten unas tablas resumen de las propiedades verificadas por dichos operadores. El proceso exacto seguido con cada uno de los operadores referenciados en las citadas tablas se refleja a continuación.

Se recuerda que un operador, en caso de ser función de implicación, sólo puede pertenecer a uno de los tipos de función de implicación definidos en los capítulos precedentes de la presente memoria. Dicho tipo vendrá determinado, en primera instancia, por la tabla de verdad o las condiciones frontera que verifica. Por tanto, se puede discriminar la familia candidata utilizando únicamente los valores frontera del operador en cuestión, en la tabla siguiente se muestra la clasificación.

Función de implicación	**Condiciones frontera**
Material	$J(0,y)=1$ y $J(1,y)=y$
Producto	$J(0,y)=0$ y $J(1,y)=y$
Equivalencia	$J(0,0)=1$ y $J(x,1)=x$
Proyección	$J(x,0)=0$ y $J(x,1)=1$

Una vez determinada la posible familia de implicaciones a la que pertenece el operador considerado se procederá, en su caso, a estudiar la monotonía del operador, si la familia candidata es la equivalencia, este paso puede obviarse. Evidentemente, si nuestro operador no cumple las condiciones frontera de ninguna familia no sería Función de Implicación.

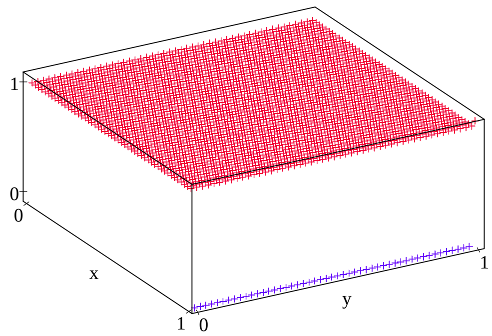
Una vez determinado si el operador considerado es función de implicación (dentro del grupo adecuado) se estudia la posibilidad de que exista alguna t-norma T para la que sea T-condicional. Evidentemente no es necesario que un operador sea función de implicación para que sea T-condicional, pero se ha considerado interesante, como ya se ha comentado varias veces, conseguir operadores que verifiquen ambas cosas.

Dado un operador $H:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$, se debe hacer notar que si se consideran $x,y\in[0,1]$ tal que $x\leq y$, trivialmente, por ser T una t-norma, $T(x,H(x,y))\leq T(y,H(x,y))\leq y$, es decir, para demostrar que un cierto operador es T-condicional para una cierta t-norma T sólo es necesario demostrarlo para los $x,y\in[0,1]$ tal que $x>y$. Y así se hará en lo que resta.

5.2 Operadores materiales

5.2.1 Operador material M1

$$J_{M1}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \neq 1 \text{ ó } y = 1 \\ 0 \text{ si } x = 1 \text{ e } y \neq 1 \end{array} \right\}$$



J_{M1} es trivialmente decreciente en la primera variable y creciente en la segunda. Veamos qué sucede con la dominancia de la falsedad y la neutralidad de la verdad.

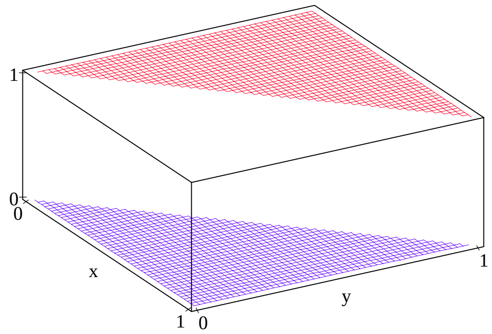
- $J_{M1}(0,y) = 1$ por definición.

- Si $y \neq 1$ es, por definición, $J_{M1}(1,y) = 0 \neq y$

Por tanto J_{M1} no es función de implicación material. Tampoco es T-condicional para ninguna t-norma T. Tomemos para ello $x = 0,5$ e $y = 0$. Entonces: $T(x, J_{M1}(x,y)) = T(0,5; J_{M1}(0,5;0)) = T(0,5;1) = 0,5 > 0 = y$, es decir, J_{M1} no es T-condicional para ninguna t-norma T.

5.2.2 Operador material M2 o de Gaines-Rescher

$$J_{M2}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



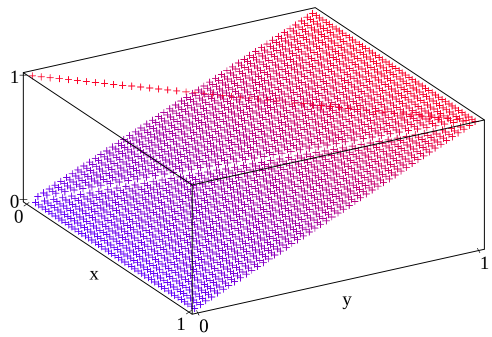
J_{M2} es trivialmente decreciente en la primera variable y creciente en la segunda. Además $J_{M2}(0,y) = 1$, pero si $y \neq 1$ es $J_{M2}(1,y) = 0 \neq y$, es decir, no se verifica la neutralidad de la verdad y, por tanto, J_{M2} no es función de implicación material.

Respecto a la condicionalidad, sea T una t-norma arbitraria. Entonces si $x > y$ es, por propiedades de las t-normas, $T(x, J_{M2}(x,y)) = T(x,0) = 0 \leq y$ en todos los casos.

Por tanto J_{M2} es T-condicional para toda t-norma T.

5.2.3 Operador material M3

$$J_{M3}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = y \\ y & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



Se comprobará e primer lugar que J_{M3} no es monótona en ningún caso. Para ello tomemos $x_1, x_2, x_3, y \in [0,1]$ tal que $x_1 < x_2 = y < x_3$. Entonces por un lado $J_{M3}(x_1, y) = y < 1 = J_{M3}(x_2, y)$, pero también $J_{M3}(x_2, y) = 1 > y = J_{M3}(x_3, y)$. De manera totalmente análoga se podría demostrar la antimonotonía en la segunda variable.

Por lo tanto ya se puede deducir que J_{M3} no es función de implicación material. Aún así veamos qué sucede con la neutralidad de la verdad y la dominancia de la falsedad.

- $J_{M3}(1, y) = y$ para todo $y \in [0, 1]$.

- Si $y \neq 0$ es $J_{M3}(0, y) = y \neq 1$.

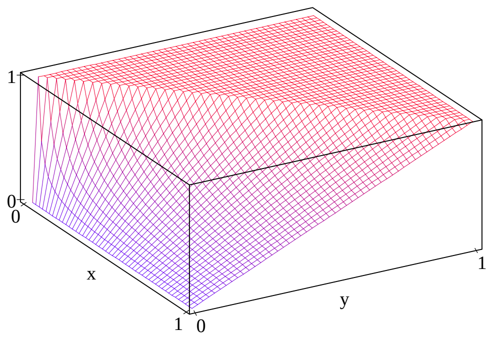
Como ya se ha dicho, para comprobar si J_{M3} es T-condicional para alguna t-norma T basta considerar los $x, y \in [0, 1]$ tal que $x > y$. Por tanto si $x > y$ es

$$T(x, J_{M3}(x, y)) = T(x, y) \leq y$$

por lo tanto J_{M3} es T-condicional para toda t-norma T.

5.2.4 Operador material M4 o de Goguen

$$J_{M4}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} Min\left(1, \dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

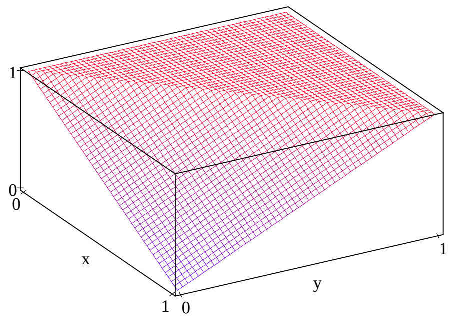


$J_{M4} = J^{Prod}$, es decir, es una R-implicación. Por tanto J_{M4} es una función de implicación $FI_{x'+y}$ y además, según el teorema 53, es T-condicional para toda t-norma $T \leq Prod$.

Nota 102 *La expresión citada es equivalente a* $J_{M4}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ si \ x \leq y \\ \dfrac{y}{x} \ si \ x > y \end{array} \right\}$, *forma en la que se encuentra citada con cierta frecuencia en la literatura la Implicación de Goguen.*

5.2.5 Operador material M5 o de Łukasiewicz

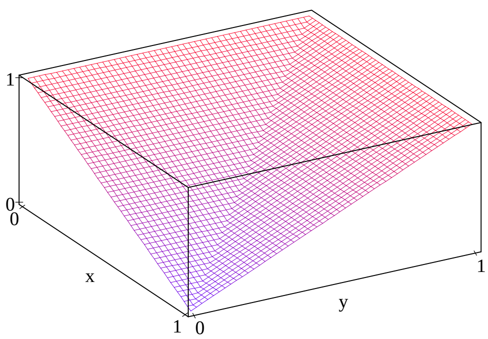
$J_{M5}(x,y) = Min(1, 1-x+y)$



$J_{M5} = J^W$, por tanto, al igual que en el caso anterior, J_{M5} es una R-implicación. Entonces es una función de implicación $FI_{x'+y}$ y T-condicional para toda t-norma $T \leq W$, según el teorema 53.

5.2.6 Operador material M6 o de Kleene-Dienes

$J_{M6}(x,y) = Max(1-x, y)$

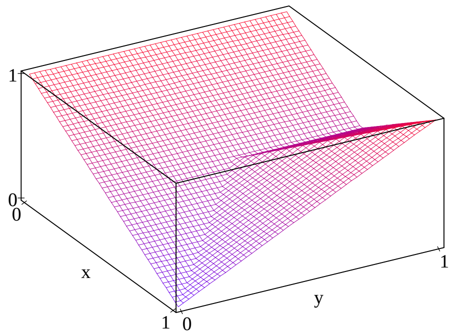


J_{M6} es una S-implicación, es decir, un operador de la forma $S(N(x), y)$ con S una t-conorma y N una función de negación. En este caso $S = Max$

y $N = 1 - id_{[0,1]}$. Por tanto sabemos de manera inmediata que J_{M6} es una función de implicación material. Además, por el teorema 65, J_{M6} es T-condicional para toda t-norma $T \leq W$.

5.2.7 Operador material M7 o Early-Zadeh

$J_{M7}(x,y) = Max(1-x, Min(x,y))$



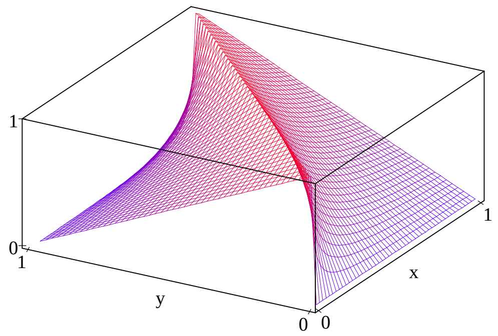
Es un QM-operador, es decir un operador de la forma $S(N(x), T(x,y))$ donde S es una t-conorma, T una t-norma y N una función de negación. En este caso $S = Max$, $T = Min$ y $N = 1 - i$. Por el teorema 20 y dado que $S = Max \notin \mathcal{F}(W^*)$ se sabe que J_{M7} no es función de implicación. Sin embargo sí es creciente en la segunda variable (se comprueba fácilmente), aunque no existe monotonía en la primera. Para demostrarlo basta tomar, por ejemplo, $y = 1$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ y $x_3 = 0,75$.

También se verifica que $J_{M7}(0,y) = Max(1, Min(0,y)) = 1$ y $J_{M7}(1,y) = Max(0, Min(1,y)) = y$.

Como $Max \leq S$ para toda $S \in \mathcal{F}(W^*)$, por el teorema 66, J_{M7} es T-condicional para toda $T \in \mathcal{F}(W)$.

5.2.8 Operador material M8

$$J_{M8}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } 1-x = 0 \\ Min\left(1, \dfrac{y}{x}, \dfrac{1-y}{1-x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } 1-y > 0 \end{array} \right\}$$



El operador J_{M8} no es monótono en ninguna de sus variables, para ello basta tomar los puntos $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,75$, $y_1 = 0,3$ e $y_2 = 0,7$. Entonces se tiene que

$$J_{M8}(x_1,y_1) = 0,93 \qquad J_{M8}(x_2,y_1) = 0,4$$
$$J_{M8}(x_1,y_2) = 0,4 \qquad J_{M8}(x_2,y_2) = 0,93$$

es decir, $J_{M8}(x_1,y_1) > J_{M8}(x_1,y_2)$ y $J_{M8}(x_2,y_1) < J_{M8}(x_2,y_2)$. Además $J_{M8}(x_1,y_1) > J_{M8}(x_2,y_1)$ y $J_{15}(x_1,y_2) < J_{15}(x_2,y_2)$. Por tanto ya se puede deducir que J_{M8} no es función de implicación material. Ahora bien, se verifica que $J_{M8}(0,y) = 1$ por definición y $J_{M8}(1,y) = Min(1,y,\infty) = y$.

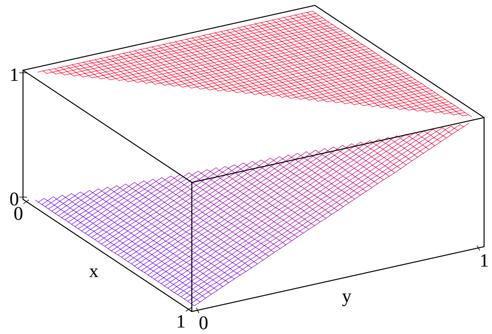
Respecto a la condicionalidad, si tomamos $x = 1$ e $y < x$ es $J_{M8}(x,y) = 1$ y por tanto

$$T(x, J_{M8}(x,y)) = T(1,1) = 1 > y$$

Así pues J_{M8} no es T-condicional para ninguna t-norma T.

5.2.9 Operador material M9 o de Gödel

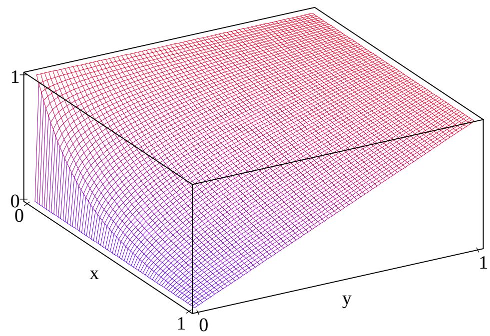
$$J_{M9}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



J_{M9} es una R-implicación, en concreto $J_{M9} = J^{Min}$, por lo tanto es función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$. Es más, según el teorema 53, J_{M9} es T-condicional para toda t-norma $T \leq Min$, es decir, para toda t-norma T.

5.2.10 Operador material M10 o Exponencial

$$J_{M10}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ y^x & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



Trivialmente J_{M10} es decreciente en la primera variable y creciente en la segunda. Además

- $J_{M10}(0,y) = y^0 = 1$ si $y \neq 0$ y $J(0,y) = 1$ si $y = 0$, por tanto $J(0,y) = 1$ para todo y.

- $J_{M10}(1,y) = y^1 = y$ para todo y.

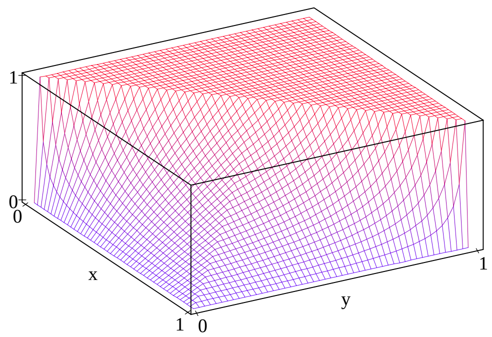
- $J_{N10}(x, J_{M10}(y,z)) = (J_{M10}(y,z))^x = (z^y)^x = z^{xy} = (z^x)^y =$

$$(J_{M10}(x,z))^y = J_{M10}(y, J_{M10}(x,z))$$

De donde se deduce que la implicación exponencial es función de implicación material. Además, según se prueba en el Teorema 74, es W-condicional.

5.2.11 Operador material M11 o de Dubois-Prade

$$J_{M11}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } 1-y=0 \\ Min\left(1, \dfrac{y}{x}, \dfrac{1-x}{1-y}\right) & \text{si } x>0 \text{ y } 1-y>0 \end{array} \right\}$$



Veremos en primer lugar que el operador J_{M11} es decreciente en su primera variable. Sean por tanto x_1, x_2 tales que $x_1, x_2 \neq 0$ y $x_1 \leq x_2$. Entonces, para y arbitrario, se tiene por un lado que $1-x_1 \geq 1-x_2$, es decir, $\dfrac{1-x_1}{1-y} \geq \dfrac{1-x_2}{1-y}$, y por otro que $\dfrac{y}{x_1} \geq \dfrac{y}{x_2}$.

Entonces $Min\left(1, \dfrac{y}{x_1}, \dfrac{1-x_1}{1-y}\right) \geq Min\left(1, \dfrac{y}{x_2}, \dfrac{1-x_2}{1-y}\right)$ y como consecuencia $J_{M11}(x_1,y) \geq J_{M11}(x_2,y)$.

Así pues J_{M11} es decreciente en su primera variable. La demostración de que es creciente en la segunda se haría de manera análoga.

Con relación a las condiciones de contorno $J_{M11}(0,y)=1$ por definición, pero para $y \neq 1$ es $J_{M11}(1,y) = Min\left(1, \frac{y}{1}, \frac{0}{1-y}\right) = 0 \neq y$. Por tanto J_{M11} no es función de implicación material.

Respecto a la condicionalidad, si tomamos $x = 0,5$ e $y = 0,49$, se comprueba trivialmente que J_{M11} no es Min-condicional. Sin embargo para $T = Prod$ resulta

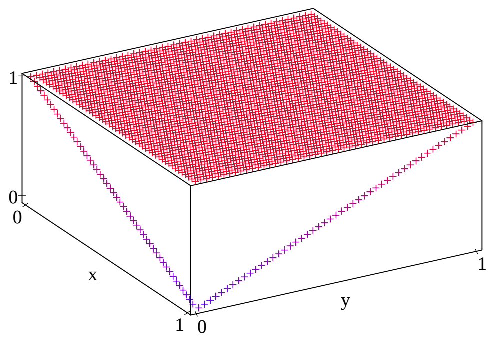
$$T(x, J_{M11}(x,y)) = Prod\left(x, Min\left(1, \frac{y}{x}, \frac{1-x}{1-y}\right)\right) = x \cdot Min\left(1, \frac{y}{x}, \frac{1-x}{1-y}\right) =$$

$$Min\left(x, x \cdot \frac{y}{x}, x \cdot \frac{1-x}{1-y}\right) \leq y$$

Así J_{M11} es $Prod$-condicional.

5.2.12 Operador material M12

$$J_{M12}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1-x & \text{si } y=0 \\ y & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



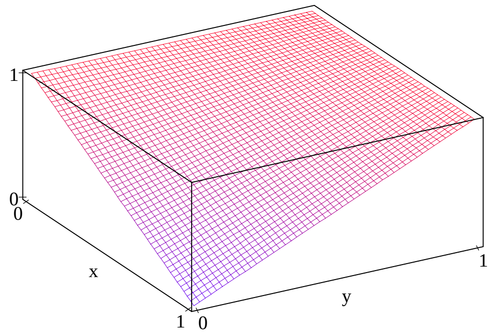
J_{M12} es una S-implicación, en concreto $J_{M12} = Z^*(1-x,y)$, por tanto, como ya se sabe, es función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$. Y además no es T-condicional para ninguna t-norma T. Para demostrarlo veremos que no es Z-condicional. Tomemos $x = 0,5$ e $y = 0,25$. Entonces

$$Z(x, J_{M12}(x,y)) = Z(x,1) = x = 0,5 > 0,25 = y$$

es decir, J_{M12} no es Z-condicional y entonces J_{M12} no es T-condicional para ninguna t-norma T.

5.2.13 Operador material M13 o de Reichenbach

$J_{M13}(x,y) = 1 - x + x \cdot y$

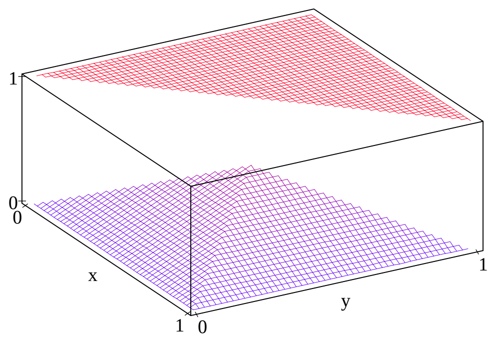


J_{M13} es una S-implicación, es decir, es de la forma $S(N(x), y)$ con S una t-conorma y N una función de negación, concretamente $J_{M13}(x,y) = Prod^*(1-x, y)$. Por tanto J_{M13} es una función de implicación material. Además, el teorema 65 asegura que J_{M13} es W-condicional puesto que es $Prod^* \leq W^*$.

Nota 103 *Esta implicación se puede encontrar en la literatura citada como Implicación de Mizumoto.*

5.2.14 Operador material M14 o de Wu

$$J_{M14}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \leq y \\ Min(1-x, y) & \text{si } x > y \end{array} \right\}$$



Se ve de manera casi inmediata que J_{M14} es decreciente en la primera variable y creciente en la segunda. Además $J_{M14}(0,y) = 1$ por definición, pero si $y \neq 1$ es $J_{M14}(1,y) = Min(1-1,y) = Min(0,y) = 0 \neq y$ para

$y \neq 0$. Por lo tanto J_{M14} no es función de implicación material.

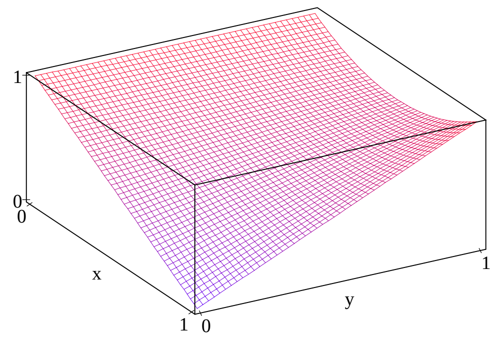
Si se considera $x > y$ se tiene que

$T(x, J_{M14}(x,y)) = T(x, Min(1-x, y)) \leq T(x,y) \leq y$

Entonces J_{M14} es T-condicional para toda t-norma T.

5.2.15 Operador material M15 o de Klir-Yuan 1

$J_{M15}(x,y) = 1 - x + x^2 y$



J_{M15} es un QM-operador, en concreto $J_{M15}(x,y) = Prod^*(1-x, Prod(x,y))$. Por tanto, como $Prod^* \notin \mathcal{F}(W^*)$, por teorema 20, se tiene que J_{M15} no es función de implicación material.

Sin embargo, sí se verifican tanto la dominancia de la falsedad, puesto que $J_{M15}(0,y) = 1 - 0 + 0 = 1$, como la neutralidad de la verdad, ya que $J_{M15}(1,y) = 1 - 1 + y = y$. También se puede comprobar de manera casi inmediata que J_{M15} es creciente en la segunda variable, pero no es decreciente en la primera, es más, en la primera variable no existe monotonía de ningún tipo. Para ello basta comprobar que

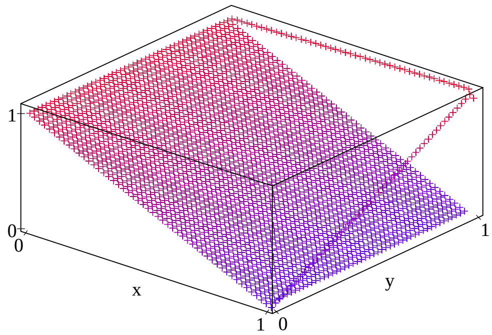
$J_{M15}(0,25;1) = 0,8125 < J_{M15}(0,85;1) = 0,8725$ y que

$J_{M15}(0,25;0) = 0,75 > J_{M15}(0,85;0) = 0,15$.

Por el teorema 66 se tiene que J_{M15} es W-condicional puesto que $Prod^* \leq W^*$.

5.2.16 Operador material M16 o de Klir-Yuan 2

$$J_{M16}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y & \text{si } x = 1 \\ 1-x & \text{si } x \neq 1, y \neq 1 \\ 1 & \text{si } x \neq 1, y = 1 \end{array} \right\}$$



J_{M16} es, al igual que en el caso anterior, un QM-operador, en concreto, $J_{M16}(x,y) = Z^*(1-x, Z(x,y))$, sin embargo, como ni Z^* ni Z son continuas no se puede aplicar el mismo teorema que en el caso anterior.

Veamos, por tanto, si se cumplen las condiciones de monotonía, contorno e intercambio que permiten afirmar que un operador es función de implicación material.

Teniendo en cuenta que $J_{M16}(0,5; 0,75) = 0,5 < J_{M16}(1; 0,75) = 0,75$ y que $J_{M16}(0,5; 0,5) = 0,5 > J_{M16}(0,75; 0,5) = 0,25$ se llega a que no existe monotonía en la primera variable, y por tanto J_{M16} no es función de implicación. Sin embargo es fácil comprobar que sí es monótona, concretamente creciente, en la segunda.

Respecto a la dominancia de la falsedad y la neutralidad de la verdad, se tiene por un lado que $J_{M16}(0,y) = 1$ si $y \neq 1$ y $J_{M16}(0,y) = 1 - 0 = 1$ si $y = 1$, es decir $J_{M16}(0,y) = 1$ en todos los casos. Además $J_{M16}(1,y) = y$ por definición.

Para que J_{M16} sea T-condicional respecto a una t-norma T, es necesario que $T(x, J_{M16}(x,y)) \leq y$ para todo x, y en $[0,1]$. Pero como

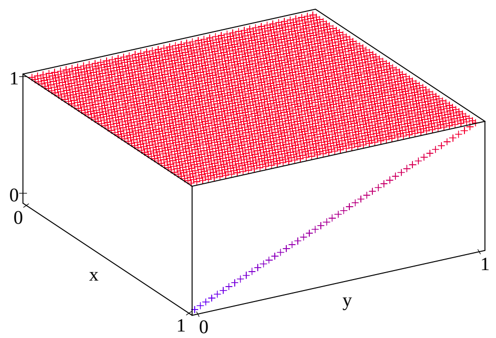
$$T\left(x, J_{M16}\left(x,y\right)\right) = \left\{ \begin{array}{ll} T\left(x,y\right) & \text{si } x=1 \\ T\left(x,1-x\right) & \text{si } x\neq 1, y\neq 1 \\ T\left(x,1\right) & \text{si } x\neq 1, y=1 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} y & \text{si } x=1 \\ T\left(x,1-x\right) & \text{si } x\neq 1, y\neq 1 \\ x & \text{si } x\neq 1, y=1 \end{array} \right\}$$

J_{M16} será T-condicional para aquellas t-normas tales que $T\left(x,1-x\right)\leq y$ para todo $x\neq 1$ e $y\neq 1$, es decir, para aquellas que verifiquen que $T\left(x,1-x\right)=0$, y eso sólo sucederá en el caso que $T\in\mathcal{F}\left(W\right)$. Por tanto J_{M16} será T-condicional para aquellas t-normas $T\in\mathcal{F}\left(W\right)$ tales que $T\left(x,1-x\right)=0$. En concreto, J_{M16} será W-condicional.

5.2.17 Operador material M17

$$J_{M17}\left(x,y\right) = \left\{ \begin{array}{ll} y & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right.$$



Trivialmente este operador es decreciente en la primera variable y creciente en la segunda. Además, respecto a las condiciones de contorno, por definición, se tiene que

- $J_{M17}\left(0,y\right)=1$.
- $J_{M17}\left(1,y\right)=y$.

Además verifica la propiedad del intercambio, como se puede probar fácilmente. Por tanto J_{M17} es función de implicación material. Pero no es

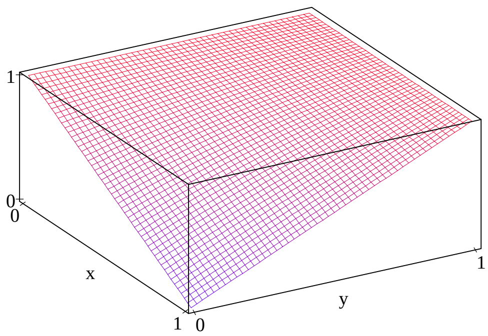
T-condicional para ninguna t-norma, puesto que si $x > y$ y $x \neq 1$ resulta

$$T(x, J_{M17}(x,y)) = T(x,1) = x > y$$

Así pues J_{M17} no es T-condicional para ninguna t-norma.

5.2.18 Operador material M18

$$J_{M18} = \frac{1+y-x}{1+y-xy}$$



J_{M18} es una S-implicación, es decir, un operador de la forma $S(N(x), y)$ con S una t-conorma y N una función de negación. En este caso $S(x,y) = \frac{x+y}{1+xy}$, llamada t-conorma de la Einstein, y $N = 1 - id_{[0,1]}$. Por tanto sabemos de manera inmediata que J_{M18} es una función de implicación material.

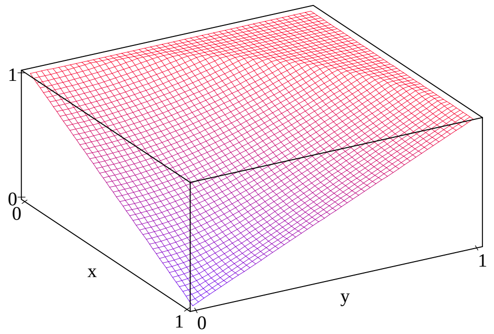
Respecto a la condicionalidad, claramente

$$S(x,y) = \frac{x+y}{1+xy} \leq Min(x+y, 1) = W^*(x,y)$$

por tanto, aplicando el teorema 61, J_{M18} es T-condicional para toda t-norma $T \leq W$.

5.2.19 Operador material M19

$$J_{M19} = Min\left[1, \sqrt{y^2 + (1-x)^2}\right]$$

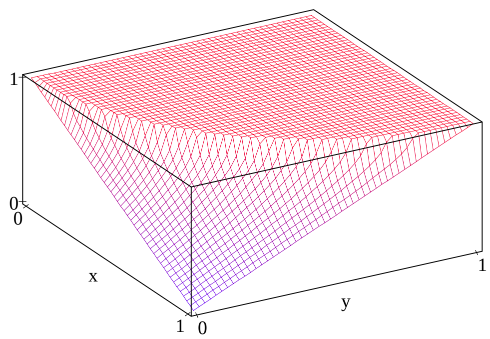


J_{M19} es una S-implicación, es decir, un operador de la forma $S(N(x), y)$ donde $S(x,y) = Min\left[1, \sqrt{x^2+y^2}\right]$ es una t-conorma de la llamada familia de Yager (para $\lambda = 2$), y $N = 1 - id_{[0,1]}$. Por tanto sabemos de manera inmediata que J_{M19} es una función de implicación material.

Como $S(x,y) = Min\left[1, \sqrt{x^2+y^2}\right] \leq Min(1, x+y) = W^*(x,y)$, según el teorema 61, J_{M19} es T-condicional para toda t-norma $T \leq W$.

5.2.20 Operador material M20

$$J_{M20}(x,y) = 1 - \sqrt{Max\left\{0, (1-y)^2 + x^2 - 1\right\}}$$

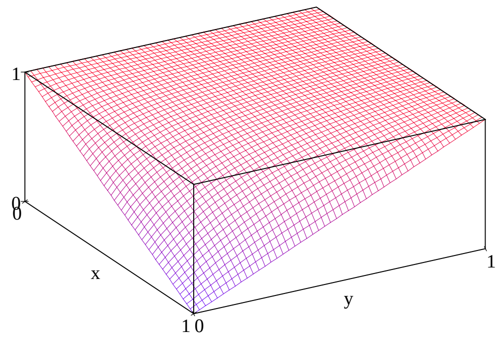


J_{M20} es una S-implicación, es decir, un operador de la forma $S(N(x), y)$ donde $S(x,y) = 1 - \sqrt{Max\left(0, (1-x)^2 + (1-y)^2 - 1\right)}$ es una t-conorma de la llamada primera familia de Schweizer (para $\lambda = 2$), y $N = 1 - id_{[0,1]}$. Por tanto sabemos de manera inmediata que J_{M19} es una función de implicación material.

Como $S(x,y) = 1-\sqrt{Max\left(0,(1-x)^2+(1-y)^2-1\right)} \leq Min(1,x+y) = W^*(x,y)$, según el teorema 61, J_{M19} es T-condicional para toda t-norma $T \leq W$.

5.2.21 Operador material M21

$$J_{M21}(x,y) = \frac{1-x+9y-8xy}{1+9y-9xy}$$



J_{M21} es una S-implicación, en concreto $J_{M21} = H_{10}^{co}(1-x,y)$, donde $H_{10}^{co}(x,y) = \dfrac{x+y+8xy}{1+9xy}$ es una t-conorma de la llamada familia de Hamacher. Por tanto, como ya se sabe, J_{M21} es función de implicación $\mathrm{FI}_{x'+y}$. Además, según el teorema 61, J_{M21} es T-condicional para toda t-norma $T \in \mathcal{F}(W)$ tal que $H_{10}^{co} \leq T^*$.

5.2.22 Tabla de operadores materiales

Operador	Monotonía	$J(0,y)=1$	$J(1,y)=y$	Función de implicación	T-condicionalidad
$J_{M1}(x,y)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x\neq 1 \text{ó } y=1 \\ 0 & \text{si } x=1 \text{e } y\neq 1 \end{Bmatrix}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	No	No	No
Gaines-Rescher: $J_{M2}(x,y)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x\leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{Bmatrix}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	No	No	Para toda T
$J_{M3}(x,y)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x=y \\ y & \text{en otro caso} \end{Bmatrix}$	No	No	Si	No	Para toda T
Goguen: $J_{M4}(x,y)=\begin{Bmatrix} Min\left(1,\frac{y}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{Bmatrix}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq Prod$
Łukasiewicz: $J_{M5}(x,y)=Min(1,1-x+y)$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$
Kleene-Dienes: $J_{M6}(x,y)=Max(1-x,y)$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$
Early-Zadeh: $J_{M7}(x,y)=Max(1-x,Min(x,y))$	Creciente en y	Si	Si	No	Para toda $T\in F(W)$
$J_{M8}(x,y)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x=0 \text{ ó } 1-x=0 \\ Min\left(1,\frac{y}{x},\frac{1-y}{1-x}\right) & \text{si } \begin{matrix} x>0 \text{ y} \\ 1-y>0 \end{matrix} \end{Bmatrix}$	No	Si	Si	No	Para toda T
Gödel: $J_{M9}(x,y)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x\leq y \\ y & \text{en otro caso} \end{Bmatrix}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda T
Exponencial: $J_{M10}(x,y)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x=y=0 \\ y^x & \text{en otro caso} \end{Bmatrix}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$

Tabla de operadores materiales (continuación)

Operador	Monotonía	$J(0,y)=1$	$J(1,y)=y$	Función de implicación	T-condicionalidad
Dubois-Prade: $J_{M11}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x\neq 0 \text{ ó } 1-y=0 \\ Min\left(1,\dfrac{y}{x},\dfrac{1-x}{1-y}\right) & \text{si } \begin{array}{c} x>0 \text{ y} \\ 1-y>0 \end{array} \end{array}\right\}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	No	No	Para toda $T\leq Prod$
$J_{M12}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} 1-x & \text{si } y=0 \\ y & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array}\right\}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	No
Reichenbach: $J_{M13}(x,y)=1-x+x\cdot y$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$
Wu: $J_{M14}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x\leq y \\ Min(1-x,y) & \text{si } x>y \end{array}\right\}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	No	No	Para toda T
Klir-Yuan 1: $J_{M15}(x,y)=1-x+x^2y$	Creciente en y	Si	Si	No	Para toda $T\leq W$
Klir-Yuan 2: $J_{M16}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} y & \text{si } x=1 \\ 1-x & \text{si } x\neq 1, y\neq 1 \\ 1 & \text{si } x\neq 1, y=1 \end{array}\right\}$	Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$
$J_{M17}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} y & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array}\right.$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	No	No
$J_{M18}=\dfrac{1+y-x}{1+y-xy}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$
$J_{M19}=Min\left[1,\sqrt{y^2+(1-x)^2}\right]$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$

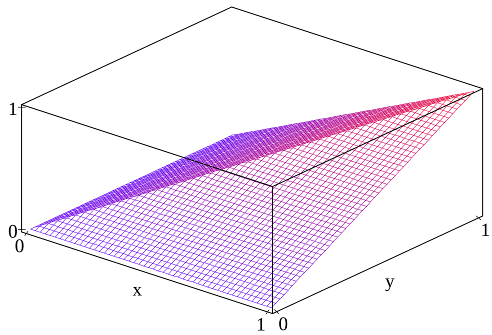
Tabla de operadores materiales (continuación)

Operador	Monotonía	$J(0,y)=1$	$J(1,y)=y$	Función de implicación	T-condicionalidad
$J_{M20}(x,y)=1-\sqrt{Max\left\{0,(1-y)^2+x^2-1\right\}}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq W$
$J_{M21}(x,y)=\dfrac{1-x+9y-8xy}{1+9y-9xy}$	Decreciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Si

5.3 Operadores producto

5.3.1 Operador producto P1 o de Mandani

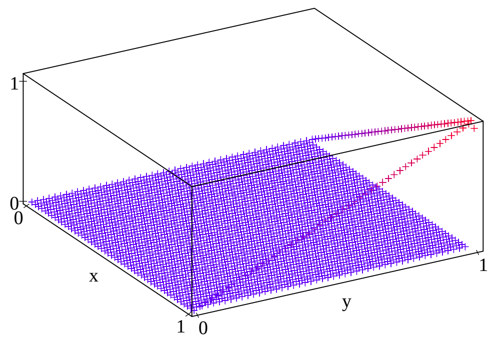
$J_{P1}(x, y) = Min(x, y)$



Tal y como afirma el teorema 29, por ser $Min(x, y)$ una t-norma, J_{P1} es una función de implicación producto. Y por ello J_{P1} es T-condicional para toda t-norma T.

5.3.2 Operador producto P2

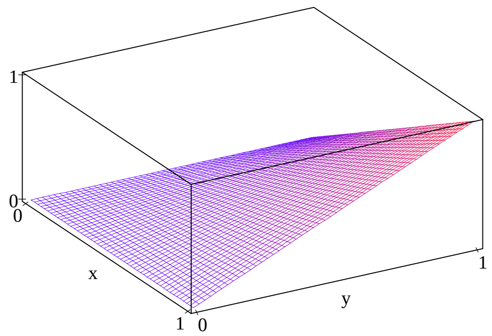
$$J_{P2}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



Al igual que en el caso de J_{P1}, tal y como afirma el teorema 29, por ser $J_{P2}(x, y) = Z(x, y)$ la t-norma más pequeña, J_{P2} es una función de implicación producto. Y como consecuencia, por el teorema 76, J_{P2} es T-condicional para toda t-norma T.

5.3.3 Operador producto P3 o de Larsen

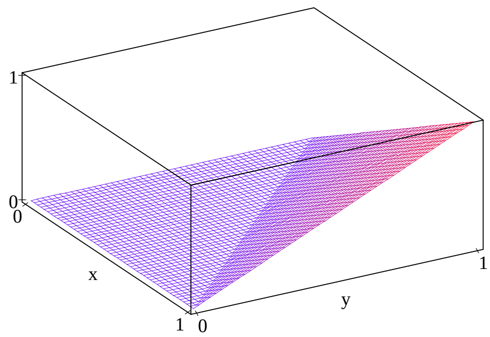
$J_{P3}(x, y) = x \cdot y$



Al igual que en el caso de J_{P1}, tal y como afirma el teorema 29, por ser $x \cdot y$ una t-norma, J_{P3} es una función de implicación producto. Y como consecuencia, por el teorema 76, J_{P3} es T-condicional para toda t-norma T.

5.3.4 Operador producto P4

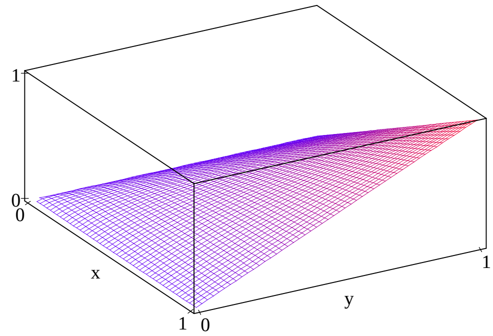
$J_{P4}(x, y) = Max\,(0, x + y - 1)$



Como sucede en el caso anterior, tal y como afirma el teorema 29, por ser el operador $Max\,(0, x + y - 1)$ una t-norma, J_{P4} es una función de implicación producto. Y como consecuencia, por el teorema 76, J_{P4} es T-condicional para toda t-norma T.

5.3.5 Operador producto P5 o de Hamacher

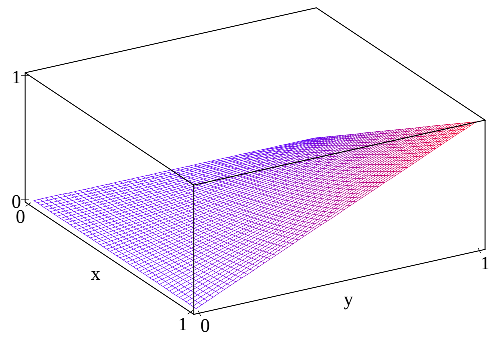
$$J_{P5}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \dfrac{x \cdot y}{x + y - x \cdot y} & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



Teniendo en cuenta que J_{P5} es una t-norma, aplicando el teorema 29, J_{P5} es una función de implicación producto y como consecuencia del teorema 76, también se deduce en este caso que J_{P5} es T-condicional para toda t-norma T.

5.3.6 Operador producto P6 o de Einstein

$$J_{P6}(x,y) = \frac{x \cdot y}{1 + (1-x) \cdot (1-y)}$$



J_{P6} es una t-norma, por lo tanto J_{P6} es función de implicación producto. Además, por el teorema 76, se deduce que J_{P6} es T-condicional para toda t-norma T.

5.3.7 Operadores producto de fuerza

Los operadores de fuerza (*Force operators*) se introducen (ver [19]) para "combinar el propósito de modelizar el razonamiento humano de forma más natural junto con la necesidad de llegar a una implicación". A tal efecto se definieron implicaciones de fuerza de dos formas diferentes

Basadas en indistinguibilidades

Se construyen de la forma

$$J(x,y) = T(x, E(x,y))$$

donde T es una t-norma y E es una indistinguibilidad construida a partir de una función de implicación material I y una t-norma T' de la forma $E(x,y) = T'(I(x,y), I(y,x))$. Como ejemplos se podrían citar

- $J_{P7}(x,y) = x{\cdot}(1 - x - y + 2xy) = Prod(x, W(J_{M13}(x,y), J_{M13}(y,x)))$.
- $J_{P8}(x,y) = Max(y(2x-1), 0) = W(x, W(J_{M13}(x,y), J_{M13}(y,x)))$.
- $J_{P9}(x,y) = Min\left(x, \dfrac{Min(x,y)}{Max(x,y)}\right) = Min(x, J_{M4}(x,y), J_{M4}(y,x))$.

Las implicaciones de fuerza basadas en indistinguibilidades verifican todas ellas la condición $J(0,y) = 0$, pero no se puede afirmar nada de forma general respecto al resto de las condiciones de las implicaciones producto. Por ejemplo, el operador $J_{P7}(x,y) = x \cdot (1 - x - y + 2xy)$ es no monótono en la segunda variable, como se puede comprobar tomando $x = 1$ y $x = \frac{1}{4}$. Y el operador $J_{P8}(x,y) = Min\left(x, \dfrac{Min(x,y)}{Max(x,y)}\right)$ no verifica el intercambio, concretamente para $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ y $z = 1$, ni tampoco la monotonía (basta tomar $y = 0,25$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ y $x_3 = 0,75$ para comprobarlo).

Respecto a la condicionalidad, claramente, si la función de implicación material respecto a la que se construye es T-condicional respecto a una t-norma T, la implicación fuerte resultante también lo es. Por ello todas las citadas son $Prod$-condicionales, puesto que $J_{P7}(x,y) = x \cdot (1 - x - y + 2xy)$ y $J_{P8}(x,y) = Max\left(y\left(2x-1\right),0\right)$ se construyen a partir de la función de implicación material de Reichenbach (ver página 109), mientras $J_{P9}(x,y) = Min\left(x, \dfrac{Min\left(x,y\right)}{Max\left(x,y\right)}\right)$ se obtiene a partir de la función de implicación material de Goguen (ver página 102).

Basadas en distancias

Se construyen de la forma

$$J(x,y) = T\left(x, 1 - d\left(x,y\right)\right)$$

donde T es una t-norma y d es una distancia. Como ejemplos se podrían citar

- $J_{P10}(x,y) = x \cdot (1 - |x-y|)$.
- $J_{P11}(x,y) = Min\left(x, 1 - |x-y|\right)$.
- $J_{P12}(x,y) = Max\left(x - |x-y|, 0\right)$.
- $J_{P13}(x,y) = x \cdot \left(1 - |x-y|^2\right)$.

Las implicaciones de fuerza basadas en distancia verifican todas ellas las condiciones de contorno de las funciones de implicación producto, es decir, $J(0,y) = 0$ y $J(1,y) = y$ para todo $y \in [0,1]$. Sin embargo es fácilmente comprobable que no son crecientes en la segunda variable, puesto que las distancias no son monótonas en su segunda variable. Por lo tanto las implicaciones de fuerza basadas en distancias no son funciones de implicación producto.

Respecto a la T-condicionalidad de las implicaciones de fuerza basadas en distancias se tiene que para la t-norma Z es

$$Z(x, J(x,y)) = \left\{ \begin{array}{cc} x & \text{si } J(x,y) = 1 \\ J(x,y) & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

Por tanto si $x = 1$ es

$$Z(1, J(1,y)) = J(1,y) = T(1, 1 - d(1,y)) = 1 - d(1,y)$$

Si J fuese Z-condicional sería $Z(x, J(x,y)) \leq y$ para todo x, y en $[0,1]$. Entonces para $x = 1$ tendría que ser $Z(1, J(1,y)) \leq y$, es decir, $1 - d(1,y) \leq y$ y por tanto $1 - y \leq d(1,y)$.

Resumiendo, teniendo en cuenta que $J(x,y) = 1$ si y sólo si $x = y = 1$, es condición necesaria y suficiente para que exista una t-norma T tal que J sea T-condicional que $1 - y \leq d(1,y)$.

Entonces, por ejemplo, la implicación $J_{P13}(x,y) = x \cdot \left(1 - |x-y|^2\right)$ no es condicional para ninguna t-norma, puesto que $d(1,y) = |1-y|^2 < 1 - y$ para todo $y \neq 0$ e $y \neq 1$.

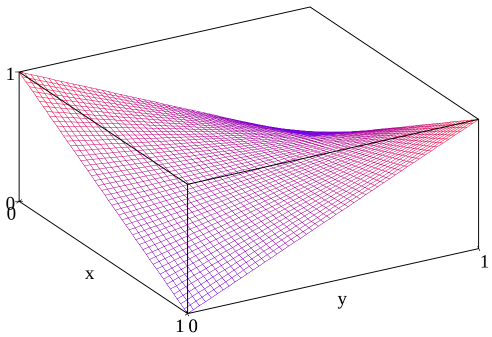
5.3.8 Tabla de operadores producto

Operador	Monotonía	$J(0,y)=0$	$J(1,y)=y$	Función de implicación	T-condicionalidad
Mandani: $J_{P1}(x,y)=Min(x,y)$	Creciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{P2}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} x & \text{si } y=1 \\ y & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{array}\right\}$	Creciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda T
Larsen: $J_{P3}(x,y)=x\cdot y$	Creciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{P4}(x,y)=Max(0,x+y-1)$	Creciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda T
Hamacher: $J_{P5}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x=y=0 \\ \dfrac{x\cdot y}{x+y-x\cdot y} & \text{en otro caso}\end{array}\right\}$	Creciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda T
Einstein: $J_{P6}(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{1+(1-x)\cdot(1-y)}$	Creciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{P7}(x,y)=x\cdot(1-x-y+2xy)$	No	Si	Si	No	Para toda $T\leq Prod$
$J_{P8}(x,y)=Max(y(2x-1),0)$	Creciente en x Creciente en y	Si	Si	Si	Para toda $T\leq Prod$
$J_{P9}(x,y)=Min\left(x,\dfrac{Min(x,y)}{Max(x,y)}\right)$	No	Si	Si	No	Para toda $T\leq Prod$
$J_{P10}(x,y)=x\cdot(1-\lvert x-y\rvert)$	No	Si	Si	No	Para toda $T\leq W$
$J_{P11}(x,y)=Min(x,1-\lvert x-y\rvert)$	No	Si	Si	No	Si
$J_{P12}(x,y)=Max(x-\lvert x-y\rvert,0)$	No	Si	Si	No	Si
$J_{P13}(x,y)=x\cdot\left(1-\lvert x-y\rvert^{2}\right)$	No	Si	Si	No	No

5.4 Operadores equivalencia

5.4.1 Operador equivalencia E1

$J_{E1}(x,y) = 1 - x - y + 2xy$



Se tiene que

- $J_{E1}(0,0) = 1$.

- $J_{E1}(x,1) = 1 - x - 1 + 2x = x$ para todo x.

- $J_{E1}(x,y) = J_{E1}(y,x)$ por definición.

Por tanto J_{E1} es función de implicación equivalencia. Con relación a la monotonía resulta que como $J_{E1}(x,y) = 1-x-y+2xy = 1-y+x(2y-1)$, expresión que claramente decrece con su primera variable si $y < \frac{1}{2}$ mientras que crece si $y > \frac{1}{2}$. Así pues este operador no es monótono ni en su primera ni en su segunda variable, puesto que el operador es simétrico.

Respecto a la condicionalidad, se puede probar fácilmente, basta hacerlo para $y = 0$, que la implicación J_{E1} no es condicional ni para la t-norma del mínimo ni para ninguna de la familia del producto. Sin embargo sí que es W-condicional, como se demuestra a continuación.

$W(x, J_{E1}(x,y)) = Max(0, x + 1 - x - y + 2xy - 1) =$

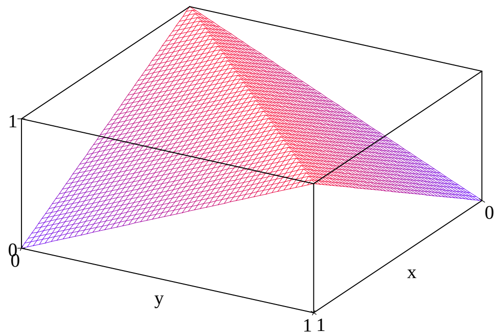
$Max(0, 2xy - y) = Max(0, y(2x - 1)) \leq y$

puesto que $0 \leq y$, pero también $y(2x-1) \leq y$ ya que $2x - 1 \leq 1$. Así pues

J_{E1} es W-condicional.

5.4.2 Operador equivalencia E2 o indistinguibilidad de Łukasiewicz

$J_{E2}(x,y) = 1 - |x - y|$



Se tiene que

- $J_{E2}(0,0) = 1$.

- $J_{E2}(x,1) = 1 - |x-1| = 1 - 1 + x = x$ para todo x.

- $J_{E2}(x,y) = J_{E2}(y,x)$ por definición.

Por tanto J_{E2} es función de implicación equivalencia. Con relación a la monotonía, para $y = 0,5$, resulta que

Si $x = 0,25 < y$ es $J_{E2}(x,y) = 0,75$

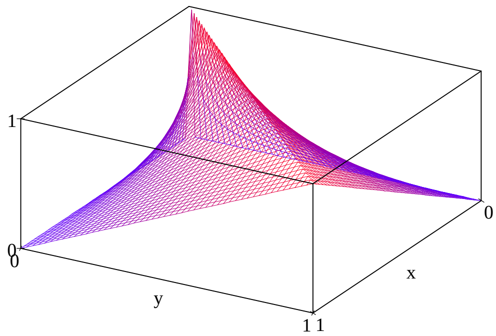
Si $x = y = 0,5$ es $J_{E2}(x,y) = 1$

Si $x = 0,75 > y$ es $J_{E2}(x,y) = 0,75$

Entonces, claramente, se deduce que J_{E2} no es monótona para ninguna de las variables, puesto que la implicación es conmutativa. Se prueba fácilmente que la implicación J_{E2} no es ni Min-condicional ni $Prod$-condicional, pero sin embargo sí es condicional respecto a la t-norma de Łukasiewicz.

5.4.3 Operador equivalencia E3 o indistinguibilidad producto

$$J_{E3}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Min(x,y)}{Max(x,y)} & \text{si } Max(x,y) > 0 \\ 1 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$



Al igual que en el caso anterior sucede que

- $J_{E3}(0,0) = 1$.
- $J_{E3}(x,1) = \dfrac{Min(x,1)}{Max(x,1)} = Min(1,x) = x$.
- $J_{E3}(x,y) = J_{E3}(y,x)$ por definición.

por lo que J_{E3} es una implicación equivalencia. Sin embargo no es monótona en la primera componente, puesto que, por ejemplo, para $y = 0,5$ es

Si $x = 0,25 < y$ es $J_{E3}(x,y) = \dfrac{Min(0,25;0,5)}{Max(0,25;0,5)} = \dfrac{0,25}{0,5} = \dfrac{1}{2}$

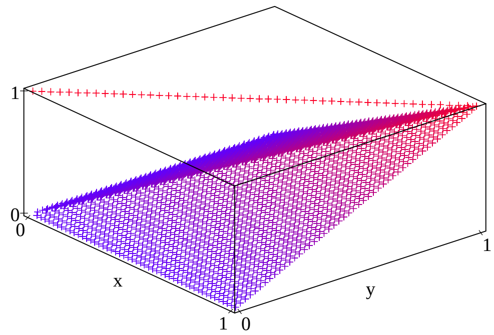
Si $x = y = 0,5$ es $J_{E3}(x,y) = \dfrac{Min(0,5;0,5)}{Max(0,5;0,5)} = \dfrac{0,5}{0,5} = 1$

Si $x = 0,75 > y$ es $J_{E3}(x,y) = \dfrac{Min(0,75;0,5)}{Max(0,75;0,5)} = \dfrac{0,5}{0,75} = \dfrac{2}{3}$

Teniendo en cuenta que la implicación es conmutativa tampoco es monótona en la segunda variable. Además se deduce de manera inmediata que J_{E3} es $Prod$-condicional ya que $J_{E3}(x,y) = Min(J_{P4}(x,y), J_{P4}(y,x))$.

5.4.4 Operador equivalencia E4 o indistinguibilidad del mínimo

$$J_{E4}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = y \\ Min(x,y) & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



De forma similar a los casos anteriores se tiene que

- $J_{E4}(0,0) = 1$ por definición.

- $J_{E4}(x,1) = Min(x,1) = x$.

- $J_{E4}(x,y) = J_{E4}(y,x)$ por definición.

es decir, J_{E4} es una implicación equivalencia. Sin embargo no es monótona en la primera componente, puesto que, por ejemplo, para $y = 0,5$ es

Si $x = 0,25 < y$ es $J_{E4}(x,y) = Min(0,25; 0,5) = 0,25$

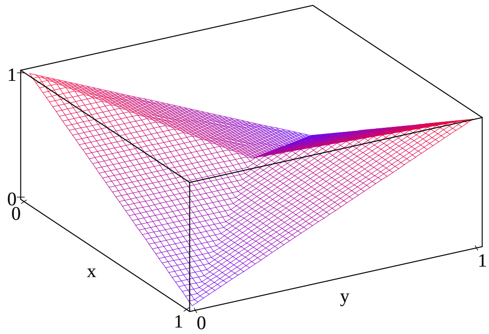
Si $x = y = 0,5$ es $J_{E4}(x,y) = 1$

Si $x = 0,75 > y$ es $J_{E4}(x,y) = Min(0,75; 0,5) = 0,5$

Así pues la indistinguibilidad del mínimo, por ser conmutativa, no es monótona respecto a ninguna de las dos variables. Sin embargo sí es condicional, en concreto, puesto que $J_{E4}(x,y) = Min(J_{M9}(x,y), J_{M9}(y,x))$, J_{E4} es Min-condicional,.

5.4.5 Operador equivalencia E5

$$J_{E5}(x,y) = Min\left[Max(1-x,y), Max(x,1-y)\right]$$



Así se verifica que

- $J_{E5}(0,0) = Min\left[Max(1,0), Max(0,1)\right] = Min[1,1] = 1.$

- $J_{E5}(x,1) = Min\left[Max(1-x,1), Max(x,0)\right] = Min[1,x] = x$ para todo x en $[0,1]$.

- $J_{E5}(x,y) = J_{E5}(y,x)$ por propiedades del mínimo.

Por tanto J_{E5} es una función de implicación equivalencia, que además no es monótona. Para ello basta tomar $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0,25$ e $y_2 = 0,75$ resultando que $J_{E5}(x_1,y_1) = 0,75 > 0,25 = J_{E5}(x_2,y_1)$, pero $J_{E5}(x_1,y_2) = 0,25 < 0,75 = J_{E5}(x_2,y_2)$.

Respecto a la condicionalidad se tiene que

$$W(x, J_{E5}(x,y)) = Max\left(0, x + Min\left[Max(1-x,y), Max(x,1-y)\right] - 1\right) =$$

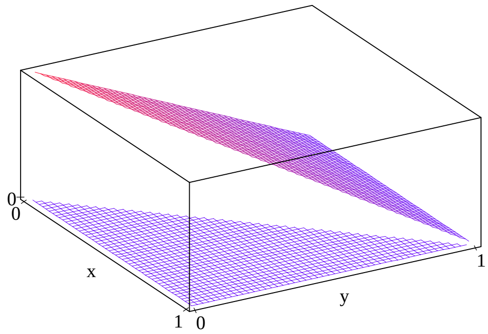
$$Max\left(0, Min\left[Max(0,x+y-1), Max(2x-1,x-y)\right]\right) \leq$$

$$Max\left(0, Max(0,x+y-1)\right) = Max(0,x+y-1) = W(x,y) \leq y$$

Entonces J_{E5} es W-condicional.

5.4.6 Operador equivalencia E6 o de Dienes

$J_{E6}(x,y) = Min\,(J_{M2}(x,y)\,, J_{M9}(1-x, 1-y))$



Se tiene que

- $J_{E6}(0,0) = Min\,(J_{M2}(0,0)\,, J_{M9}(1,1)) = Min\,(1,1) = 1$

- $J_{E6}(x,1) = Min\,(J_{M2}(x,1)\,, J_{M9}(1-x,0)) = Min\,(1,0) = 0 \neq x$

para todo $x \neq 0$

Por tanto J_{E6} no es función de implicación equivalencia. Con relación a la monotonía resulta que

Si $x < y$ es $J_{E6}(x,y) = Min\,(1, 1-y) = 1-y$

Si $x = y$ es $J_{E6}(x,y) = Min\,(1,1) = 1$

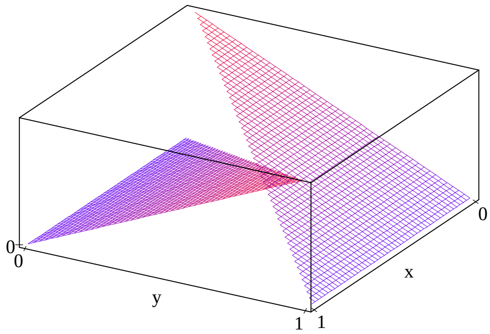
Si $x > y$ es $J_{E6}(x,y) = Min\,(0,1) = 0$

Entonces, claramente, se deduce que J_{E6} no es monótona para ninguna de las variables.

Ahora bien, como $J_{E6} \leq J_{M2}$ y, tal y como se ha visto (página 101), J_{M2} es T-condicional para toda t-norma T, entonces J_{E6} es T-condicional para toda t-norma T.

5.4.7 Operador equivalencia E7

$J_{E7}(x,y) = Min\,(J_{M9}(x,y)\,, J_{M9}(1-x,1-y))$



Al igual que en el caso anterior sucede que

- $J_{E7}(0,0) = Min\,(J_{M9}(0,0)\,, J_{M9}(1,1)) = Min\,(1,1) = 1$

- $J_{17}(x,1) = Min\,(J_{M9}(x,1)\,, J_{M9}(1-x,0)) = Min\,(1,0) = 0 \neq x$

para todo $x \neq 0$.

Por tanto J_{E7} no es función de implicación equivalencia. Con relación a la monotonía es

Si $x < y$ es $J_{E7}(x,y) = Min\,(1, 1-y) = 1-y$

Si $x = y$ es $J_{E7}(x,y) = Min\,(1,1) = 1$

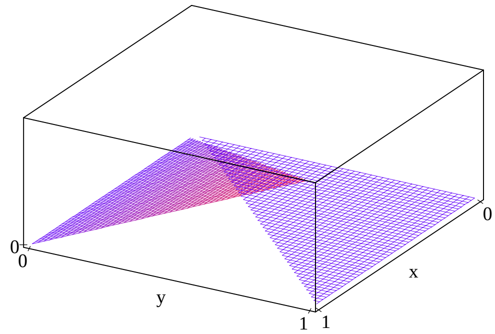
Si $x > y$ es $J_{E7}(x,y) = Min\,(y,1) = y$

Entonces, claramente, se deduce que J_{E7} no es monótona para ninguna de las variables.

Ahora bien, como $J_{E7} \leq J_{M9}$ y, tal y como se ha visto (página 106), J_{M9} es T-condicional para toda t-norma T, entonces J_{E7} es T-condicional para toda t-norma T.

5.4.8 Operador equivalencia E8

$J_{E8}(x,y) = Min(J_{M9}(x,y), J_{M2}(1-x,1-y))$



Análogamente a los casos anteriores

- $J_{E8}(0,0) = Min(J_{M9}(0,0), J_{M2}(1,1)) = Min(1,1) = 1.$

- $J_{18}(x,1) = Min(J_{M9}(x,1), J_{M2}(1-x,0)) = Min(1,0) = 0 \neq x$

para todo $x \neq 0$.

Por tanto J_{E8} no es función de implicación equivalencia. Con relación a la monotonía es

Si $x < y$ es $J_{E8}(x,y) = Min(1,0) = 0$

Si $x = y$ es $J_{E8}(x,y) = Min(1,1) = 1$

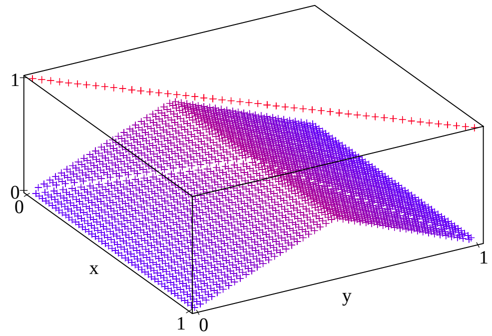
Si $x > y$ es $J_{1E8}(x,y) = Min(y,1) = y$

Entonces, claramente, se deduce que J_{E8} no es monótona para ninguna de las variables.

Ahora bien, como $J_{E8} \leq J_{M9}$ y, tal y como se ha visto (página 106), J_{M9} es T-condicional para toda t-norma T, entonces J_{E8} es T-condicional para toda t-norma T.

5.4.9 Operador equivalencia E9

$$J_{E9}(x,y) = Min\left(J_{M2}(x,y), J_{M2}(1-x,1-y)\right)$$



De forma análoga a los casos anteriores sucede que J_{E9} no es función de implicación equivalencia ya que

- $J_{E9}(0,0) = Min\left(J_{M2}(0,0), J_{M2}(1,1)\right) = Min(1,1) = 1.$

- $J_{E9}(x,1) = Min\left(J_{M2}(x,1), J_{M2}(1-x,0)\right) = Min(1,0) = 0 \neq x$

para todo $x \neq 0$.

Con relación a la monotonía es

Si $x < y$ es $J_{E9}(x,y) = Min(1,0) = 0$

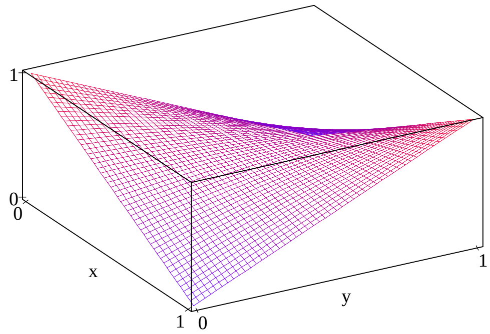
Si $x = y$ es $J_{E9}(x,y) = Min(1,1) = 1$

Si $x > y$ es $J_{E9}(x,y) = Min(0,1) = 0$

Entonces, claramente, se deduce que J_{17} no es monótona para ninguna de las variables. Ahora bien, como $J_{E9} \leq J_{M2}$ y, tal y como se ha visto (página 101), J_{M2} es T-condicional para toda t-norma T, entonces J_{E9} es T-condicional para toda t-norma T.

5.4.10 Operador equivalencia E10

$$J_{E10}(x,y) = (1 - x + xy)(1 - y + xy)$$

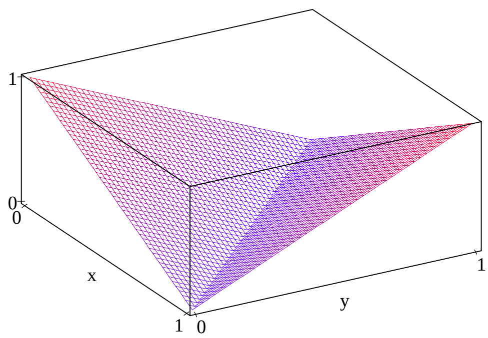


Este operador se construye a partir de la función de implicación material M13 o de Reichenbach (ver página 109), de la forma $J_{E10}(x,y) = Prod\left(J_{M13}(x,y), J_{M13}(y,x)\right)$ por lo que, según el teorema 37, J_{E10} es una función de implicación equivalencia.

Como $J_{E10} \leq J_{M13}$ y, tal y como se ha visto (página 109), J_{M13} es W-condicional para toda t-norma, entonces J_{E10} es W-condicional para toda t-norma.

5.4.11 Operador equivalencia E11

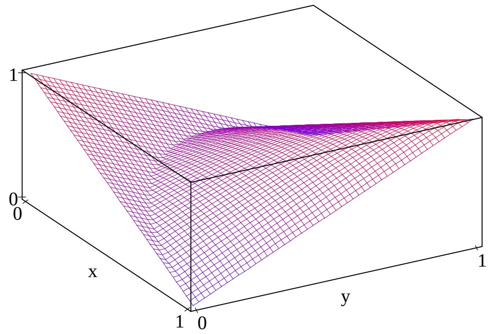
$$J_{E11}(x,y) = |1 - (x + y)|$$



Se puede comprobar de manera casi inmediata que $J(x,y) = |1 - (x+y)| = 1 - x - y + 2W(x,y)$, por lo que, según el teorma 41 J_{E11} es función de implicación equivalencia. Además según el teorema 100 J_{E11} es W-condicional.

5.4.12 Operador equivalencia E12

$$J_{E12}(x,y) = Max\left\{1-x-y, 3-x-y-2\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\right\}$$



Tal y como sucede en el caso anterior el operador J_{E12} es de la forma $1-x-y+2T(x,y)$, donde en este caso $T(x,y) = 1-Max\left\{1, \sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\right\}$ es una t-norma de la llamada familia de Yager. Por tanto, según el teorema 41 J_{E12} es función de implicación equivalencia y según el teorema 100 es W-condicional.

5.4.13 Tabla de operadores equivalencia

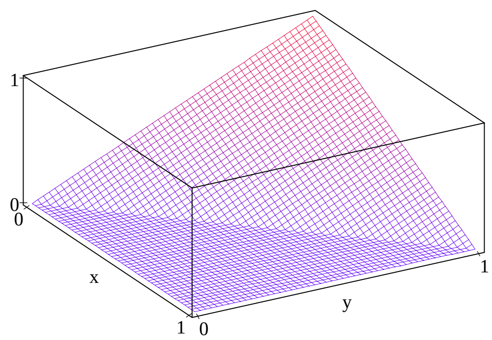
Operador	Monotonía	$J(0,0)=0$	$J(x,1)=y$	Función de implicación	T-condicionalidad
$J_{E1}(x,y)=1-x-y+2xy$	No	Si	Si	Si	Para toda $T \leq W$
Indistinguibilidad de Łuckasiewicz: $J_{E2}(x,y)=1-\lvert x-y\rvert$	No	Si	Si	Si	Para toda $T \leq W$
Indistinguibilidad producto: $J_{E3}(x,y)=Min\left(1,\dfrac{Min(x,y)}{Max(x,y)}\right)$	No	Si	Si	Si	Para toda $T \leq Prod$
Indistinguibilidad del mínimo: $J_{E4}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x=y \\ Min(x,y) & \text{en otro caso}\end{array}\right\}$	No	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{E5}(x,y)=Min\{Max(1-x,y),Max(x,1-y)\}$	No	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{E6}(x,y)=Min(J_2(x,y),J_{27}(1-x,1-y))$	No	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{E7}(x,y)=Min(J_{27}(x,y),J_{27}(1-x,1-y))$	No	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{E8}(x,y)=Min(J_{27}(x,y),J_2(1-x,1-y))$	No	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{E9}(x,y)=Min(J_2(x,y),J_2(1-x,1-y))$	No	Si	Si	Si	Para toda T
$J_{E10}(x,y)=(1-x+xy)(1-y+xy)$	No	Si	Si	Si	Para toda $T \leq W$
$J_{E11}(x,y)=\lvert 1-(x+y)\rvert$	No	Si	Si	Si	Para toda $T \leq W$
$J_{E12}(x,y)=Max\left\{1-x-y,3-x-y-2\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\right\}$	No	Si	Si	Si	Para toda $T \leq W$

5.5 Otros operadores booleanos

Se presentan a continuación algunos operadores que, si bien su tabla de verdad se corresponde con la de una implicación booleana, dicha implicación no verifica las condiciones de contorno consideradas razonables, es decir $J(1,0) = 0$ y $J(1,1) = 1$. Aún así, se ha considerado que hay algunas propiedades interesantes que verifican y que se estudian a continuación. Se empezará el estudio de cada uno de los operadores con su tabla de verdad y después se estudiará la monotonía y la T-condicionalidad de cada uno de ellos.

5.5.1 Operador B1

$J_{B1}(x,y) = Max(0, y-x)$



Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	0	0

tabla que se corresponde con la de la implicación booleana $x' \cdot y$.

Se ve de forma casi inmediata que el operador J_{B1} considerado es creciente en la segunda variable y decreciente en la primera. Respecto a la condicionalidad sucede que para una t-norma cualquiera T es

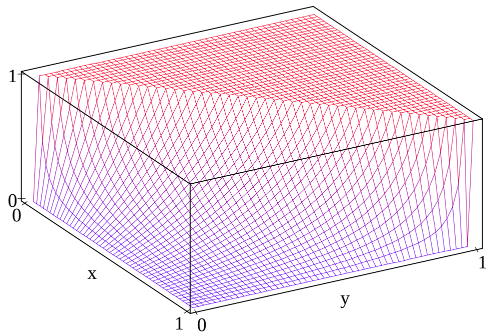
$$T(x, J_{B1}(x, y)) = T(x, Max(0, y - x)) \leq T(x, Max(0, y)) =$$

$$T(x, y) \leq y$$

es decir, J_{B1} es T-condicional para cualquier t-norma T.

5.5.2 Operador B2

$$J_{B2}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 0 \text{ ó } x = y = 1 \\ Min\left(1, \dfrac{y \cdot (1 - x)}{x \cdot (1 - y)}\right) & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Su tabla de verdad es

	0	1
0	1	1
1	0	0

tabla que se corresponde con la de la implicación booleana x'. Respecto a la monotonía se puede demostrar que este operador es decreciente en la primera variable y creciente en las segunda. Sólo se demostrará el primer caso, puesto que el razonamiento del segundo es totalmente análogo.

Sean por tanto $x_1 \leq x_2$ entonces $\dfrac{1}{x_1} \geq \dfrac{1}{x_2}$ y por tanto $\dfrac{y}{1-y} \cdot \dfrac{1}{x_1} \geq \dfrac{y}{1-y} \cdot \dfrac{1}{x_2}$. Ahora bien

$$(1-x_1)\cdot\frac{y}{(1-y)\cdot x_1}\geq(1-x_1)\cdot\frac{y}{(1-y)\cdot x_2}$$

pero como $1-x_1\geq 1-x_2$ es

$$(1-x_1)\cdot\frac{y}{(1-y)\cdot x_1}\geq(1-x_2)\cdot\frac{y}{(1-y)\cdot x_2}$$

es decir $J_{B2}(x_1,y)\geq J_{B2}(x_2,y)$ y se ha demostrado que el operador es decreciente en la primera variable.

Con relación a la T-condicionalidad para $T=Prod$ es

$$T(x,J_{B2}(x,y))=x\cdot Min\left(1,\frac{y\cdot(1-x)}{x\cdot(1-y)}\right)\leq x\cdot\frac{y\cdot(1-x)}{x\cdot(1-y)}=\frac{y\cdot(1-x)}{(1-y)}$$

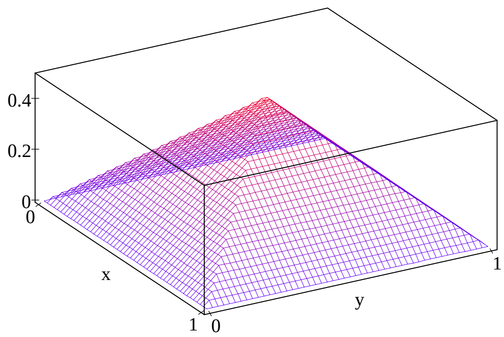
Ahora bien, para $x>y$ es $1-x<1-y$, es decir, $\frac{1-x}{1-y}<1$. Por tanto para $x>y$ es

$$T(x,J_{B2}(x,y))\leq\frac{y\cdot(1-x)}{(1-y)}\leq y$$

Entonces J_{B2} es T-condicional para toda t-norma $T\leq Prod$.

5.5.3 Operador B3

$$J_{B3}(x,y)=Min\left[Min(x,1-y),Min(y,1-x)\right]$$



Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	0
1	0	0

tabla que se corresponde con la de la implicación booleana constantemente nula.

Tomando $x = 0,5$, $y_1 = 0,25$, $y_2 = 0,5$ e $y_3 = 0,75$ se observa que $J_{B3}(x, y_1) = 0,25 \leq 0,5 = J_{B3}(x, y_2)$, pero $J_{B3}(x, y_2) = 0,5 \geq 0,25 = J_{B3}(x, y_3)$, es decir el operador J_{B3} no es monótono en su segunda componente. Como J_{B3} es conmutativo por construcción, tampoco es monótono en su primera componente.

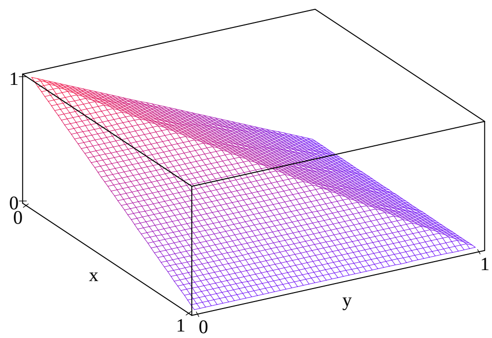
Respecto a la condicionalidad sucede que

$$J_{B3}(x, y) = Min\left[Min(x, 1-y), Min(y, 1-x)\right] \leq Min(y, 1-x) \leq y$$

es decir, $T(x, J_{B3}(x, y)) \leq T(x, y) \leq y$. Por tanto J_{B3} es T-condicional para cualquier t-norma T.

5.5.4 Operador B4

$$J_{B4}(x, y) = Min(1-x, 1-y)$$



Su tabla de verdad es

	0	1
0	1	0
1	0	0

tabla que se corresponde con la de la implicación booleana $x' \cdot y'$. Claramente, por propiedades del mínimo, J_{B4} es decreciente en ambas variables. Respecto a la T-condicionalidad tomando $T = W$ es

$$T\left(x, J_{B4}\left(x, y\right)\right) = Max\left(0, x + J_{21}\left(x, y\right) - 1\right) =$$

$$Max\left(0, x + Min\left(1 - x, 1 - y\right) - 1\right) =$$

$$Max\left(0, Min\left(0, x - y\right)\right) \leq Max\left(0, 0\right) = 0 \leq y$$

Por tanto J_{B4} es T-condicional para toda t-norma $T \leq W$.

5.5.5 Tabla de otros operadores booleanos

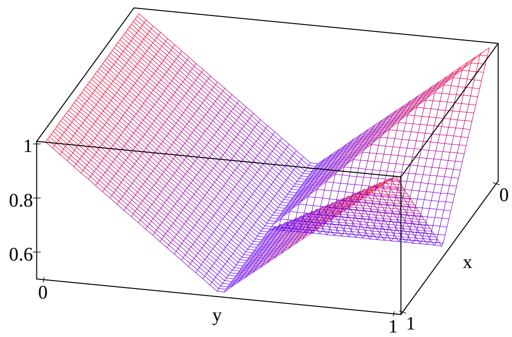
Operador	Tabla	Monotonía	T-condicionalidad
$J_{B1}(x,y) = Max(0, y-x)$	$x' \cdot y$	No	Para toda t-norma T
$J_{B2}(x,y) = Min\left(1, \dfrac{y\cdot(1-x)}{x\cdot(1-y)}\right)$	x'	Decreciente en x Creciente en y	Para toda t-norma $T \leq Prod$
$J_{B3}(x,y) = Min\left[Min(x, 1-y), Min(y, 1-x)\right]$	0	No	Para toda t-norma T
$J_{B4}(x,y) = Min(1-x, 1-y)$	$x' \cdot y'$	Decreciente en x Decreciente en y	Para toda t-norma $T \leq W$

5.6 Otros operadores no booleanos

Los operadores que se estudian a continuación tienen todos en común que su tabla de verdad no se corresponde en ningún caso con la de una implicación booleana, por lo que en principio al realizar inferencias con cualquiera de ellos no se garantiza ningún tipo de resultado. Aún así se ha considerado que hay algunas propiedades interesantes que verifican y que se estudian a continuación. Se empezará el estudio de cada uno de los operadores con su tabla de verdad y después se estudiará la monotonía. Respecto a la T-condicionalidad de cada uno de los operadores considerados, ninguno de ellos la verifica tal y como afirma el teorema 47 puesto que para todos ellos es $J(1,0) > 0$.

5.6.1 Operador NB1

$J_{NB1}(x,y) = Max\{Max[Min(x,y), 1-y], Min(y, 1-x)\}$



Su tabla de verdad es

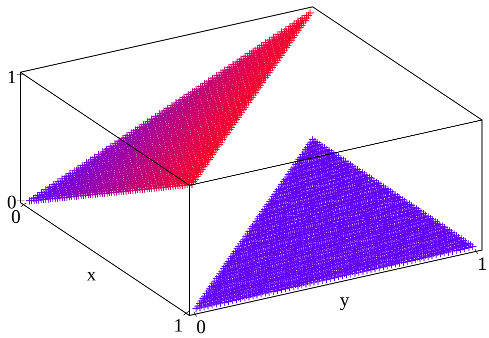
	0	1
0	1	1
1	1	1

Considérense $x_1 = 0,9$, $x_2 = 0,4$, $x_3 = 0,1$ y $y = 0,75$. Entonces como $J_{NB1}(x_1, y) = 0,75 > 0,6 = J_{NB1}(x_2, y)$ y $J_{NB1}(x_2, y) = 0,6 <$

$0,75 = J_{NB1}(x_3, y)$ se tiene que J_9 no es monótona para la primera variable. Haciendo un razonamiento análogo para la segunda variable y tomando $y_1 = 0,9$, $y_2 = 0,4$, $y_3 = 0,1$ y $x = 0,75$ se tiene que $J_{NB1}(x, y_1) = 0,75 > 0,6 = J_{NB1}(x, y_2)$ y $J_9(x, y_2) = 0,6 < 0,9 = J_{NB1}(x, y_3)$, es decir, J_{NB1} tampoco es monótona en su segunda variable.

5.6.2 Operador NB2

$$J_{NB2}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} x + y & \text{si } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



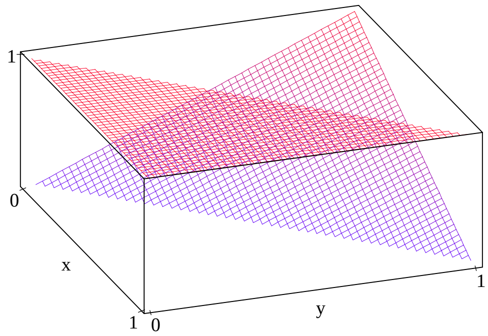
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	0

Como se puede observar J_{NB2} tampoco es monótona en ninguna de las variables por construcción.

5.6.3 Operador NB3

$$J_{NB3}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y - x & \text{si } y \geq x \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



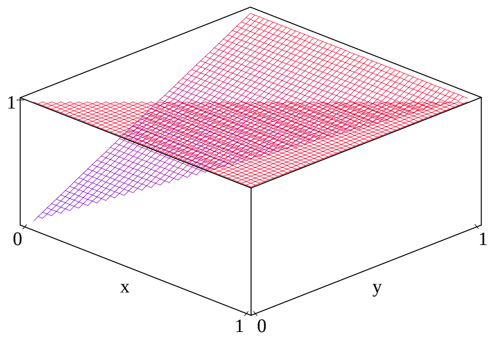
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	0

Estudiemos la monotonía del operador. Al igual que sucede con el operador anterior J_{NB3} tampoco en monótono en ninguna de sus variables por construcción.

5.6.4 Operador NB4

$$J_{NB4}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } y \leq x \\ y & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



Su tabla de verdad es

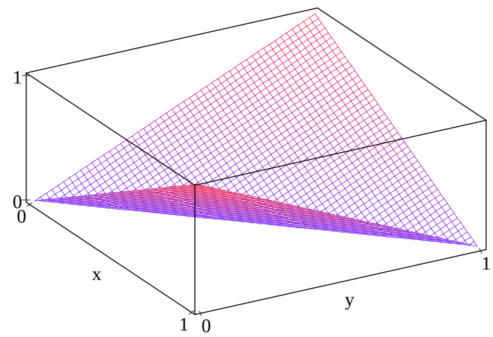
	0	1
0	1	1
1	1	1

Respecto a la monotonía del operador, para y fijo si $x < y$ es $J_{NB4}(x, y) = y$, que es constante y si $x > y$ es $J_{NB4}(x, y) = 1$, por tanto J_{NB4} es creciente en la primera variable.

Respecto a la segunda tómese $x = 0,5,\ y_1 = 0,4,\ y_2 = 0,6$ e $y_3 = 0,7$, entonces $J_{NB4}(x, y_1) = 1 > 0,6 = J_{NB4}(x, y_2)$ pero $J_{NB4}(x, y_2) = 0,6 < 0,7 = J_{NB4}(x, y_3)$, por tanto J_{NB4} no es monótona en la segunda variable.

5.6.5 Operador NB5

$J_{NB5}(x, y) = |x - y|$



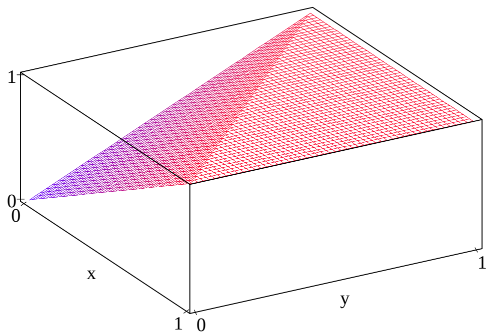
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	0

En relación a la monotonía en la primera variable si $x > y$, $J_{NB5}(x, y) = x - y$ que es creciente en x y si $x < y$, entonces $J_{NB5}(x, y) = y - x$ que es decreciente en x. Un razonamiento totalmente análogo se podría hacer para la segunda variable, puesto que es simétrica. Por tanto J_{NB5} no es monótona en ninguna de sus variables.

5.6.6 Operador NB6

$$J_{NB6}\,(x,y) = Min\,(1, x+y)$$



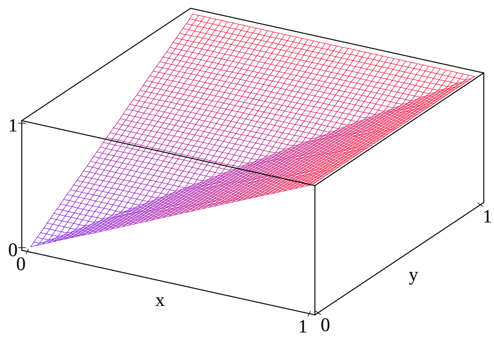
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	1

Como J_{NB6} es una t-conorma es creciente en ambas variables.

5.6.7 Operador NB7

$$J_{NB7}\,(x,y) = Max\,(x,y)$$



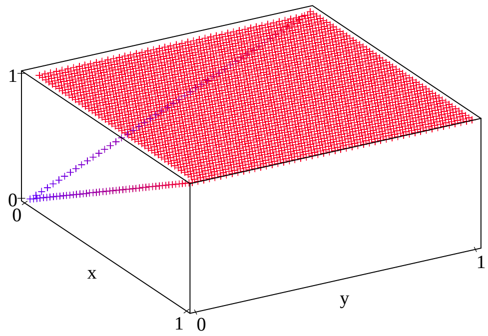
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	1

Teniendo en cuenta que J_{NB7} es una t-conorma es creciente en ambas variables.

5.6.8 Operador NB8

$$J_{33}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$



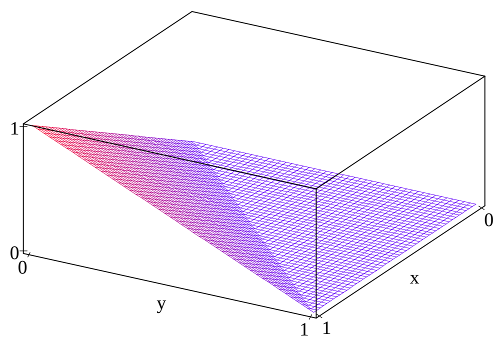
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	1

Puesto que J_{NB8} es una t-conorma es creciente en ambas variables.

5.6.9 Operador NB9

$$J_{NB9}(x,y) = Max(0, x - y)$$



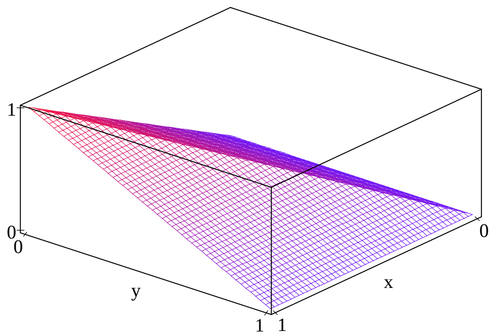
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	0
1	1	0

Respecto a la monotonía J_{NB9} es claramente creciente en la primera variable y decreciente en la segunda.

5.6.10 Operador NB10

$J_{NB10}(x,y) = Min(x, 1-y)$



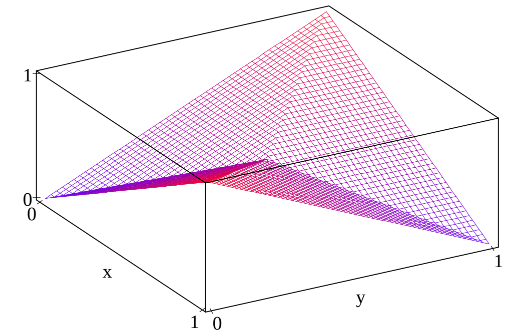
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	0
1	1	0

Respecto a la monotonía, por propiedades del mínimo, J_{NB10} es creciente en la primera variable y decreciente en la segunda.

5.6.11 Operador NB11

$J_{NB11}(x,y) = Max[Min(x, 1-y), Min(y, 1-x)]$



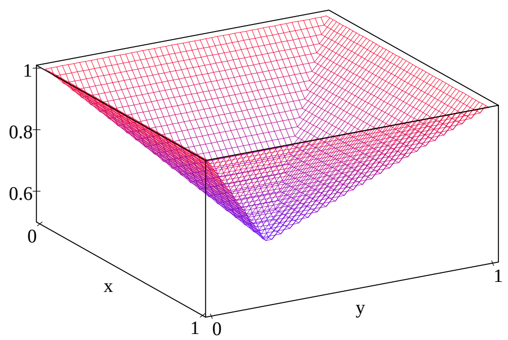
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	0

Respecto a la monotonía, tomando $y = 1$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ y $x_3 = 0,75$ es $J_{NB11}(x_1, y) = 0,75 \geq 0,5 = J_{NB11}(x_2, y)$, pero $J_{NB11}(x_2, y) = 0,5 \leq 0,75 = J_{NB11}(x_3, y)$. Por tanto J_{NB11} no es monótona en la primera variable. Análogamente se demuestra para la segunda puesto que J_{NB11} es conmutativa.

5.6.12 Operador NB12

$J_{NB12}(x, y) = Max\left[Max(x, 1 - y), Max(y, 1 - x)\right]$



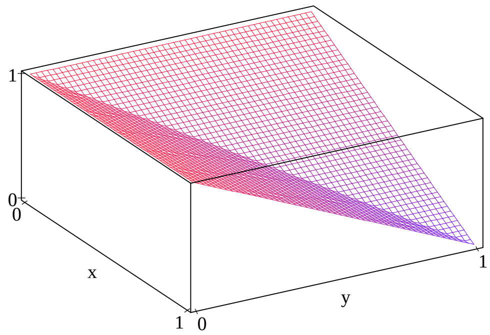
Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	0

Respecto a la monotonía, tomando $y = 0,5$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ y $x_3 = 0,75$ es se llega al mismo resultado que en el caso anterior. Por tanto J_{NB12} no es monótona en la primera variable. Análogamente se demuestra para la segunda puesto que J_{NB12} es conmutativa.

5.6.13 Operador NB13

$$J_{NB13}\,(x, y) = Max\,(1 - x, 1 - y)$$



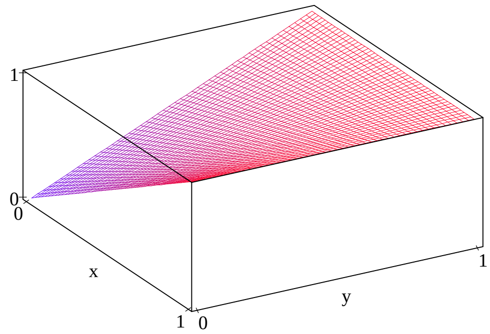
Su tabla de verdad es

	0	1
0	1	1
1	1	0

Respecto a la monotonía, por propiedades del máximo, es decreciente tanto en la primera como en la segunda variable.

5.6.14 Operador NB14

$J_{NB14}(x,y) = x + y - x \cdot y$



Su tabla de verdad es

	0	1
0	0	1
1	1	1

Respecto a la monotonía, como J_{NB14} es una t-conorma, es creciente en ambas variables.

5.6.15 Tabla de otros operadores no booleanos

Operador	Tabla	Monotonía	T-condicionalidad
$J_{NB1}(x,y) = Max\{Max[Min(x,y), 1-y], Min(y, 1-x)\}$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$	No	No
$J_{NB2}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x+y & \text{si } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$	No	No
$J_{NB3}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y-x & \text{si } y \geq x \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$	No	No
$J_{NB4}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } y \leq x \\ y & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$	Creciente en x	No
$J_{NB5}(x,y) = \|x-y\|$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$	No	No
$J_{NB6}(x,y) = Min(1, x+y)$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$	Creciente en x Creciente en y	No
$J_{NB7}(x,y) = Max(x,y)$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$	Creciente en x Creciente en y	No
$J_{NB9}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$	Creciente en x Creciente en y	No
$J_{NB10}(x,y) = Max(0, x-y)$	$\begin{array}{c\|c\|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$	Creciente en x Decreciente en y	No

Tabla de otros operadores no booleanos (continuación)

<table>
<tr><th>Operador</th><th>Tabla</th><th>Monotonía</th><th>T-condicionalidad</th></tr>
<tr><td>$J_{NB11}(x,y) = Min(x, 1-y)$</td><td><table><tr><td></td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>Creciente en x
Decreciente en y</td><td>No</td></tr>
<tr><td>$J_{NB12}(x,y) = Max\left[Min(x, 1-y), Min(y, 1-x)\right]$</td><td><table><tr><td></td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>Si</td><td>Para toda t-norma T</td></tr>
<tr><td>$J_{NB13}(x,y) = Max\left[Max(x, 1-y), Max(y, 1-x)\right]$</td><td><table><tr><td></td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>No</td><td>No</td></tr>
<tr><td>$J_{NB14}(x,y) = Max(1-x, 1-y)$</td><td><table><tr><td></td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>Decreciente en x
Decreciente en y</td><td>No</td></tr>
<tr><td>$J_{NB15}(x,y) = x + y - x \cdot y$</td><td><table><tr><td></td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Creciente en x
Creciente en y</td><td>No</td></tr>
</table>

Capítulo 6

Conclusiones y problemas abiertos

Desde el punto de vista de uso del lenguaje y de aplicación, la implicación material desempeña un papel muy limitado en la representación de un enunciado condicional del tipo "Si P entonces Q". Con el fin de reflejar dicha realidad se ha revisado el concepto de implicación borrosa y se ha llegado a la conclusión de que son al menos cuatro las clases o grupos de funciones de implicación borrosas, a las que, dependiendo de la implicación booleana de la que deriven, se han denominado funciones de implicación material, producto, equivalencia y proyección, respectivamente, obteniéndose una partición disjunta del conjunto de funciones de implación. Cada uno de los capítulos de esta memoria se estructura, por tanto, en torno a estas cuatro familias de implicación, detallándose los resultados obtenidos como los problemas abiertos como las líneas de investigación abiertas.

Capítulo 2: Funciones de implicación

Para el estudio de las funciones de impliación material se ha partido de la definición de función de implicación material dada por Trillas y Valverde (ver

[46]) en el año 1985 y de la caracterización de las R y de las S-implicaciones que se puede encontrar en [1]. Se ha verificado la existencia de funciones de implicación material que no corresponden a ninguno de estas dos familias, como es el caso de la función de implicación exponencial. Así mismo, se ha demostrado que los QM-operadores y los operadores de materiales extendidos son funciones de implicación material si la t-norma generadora pertenece a la familia de Łukasiewicz y la negación asociada no es menor que la generada por el automorfismo de orden que genera la t-norma.

A partir de las propiedades de la implicación boolena $x \cdot y$, se define una nueva clase de función de implicación de gran uso dentro del ámbito del control borroso. En base a la definición dada para este tipo de función de implicación, se demuestra que las funciones de implicación producto son conmutativas si y sólo si son t-normas. Se demuestra que los operadores construidos de la forma $T\left(A\left(x\right), y\right)$, donde $A : [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una función creciente que lleva el 0 al 0 y el 1 al 1, son siempre funciones de implicación producto y se obtiene un teorema de caracterización de la forma $J_{Prod}\left(x, y\right) = T\left(A\left(x\right), y\right)$ para aquellos operadores estrictamente crecientes en $y = 1$.

De forma similar a los dos casos anteriores y teniendo en cuenta las propiedades que satisface la implicación booleana $x \cdot y + x' \cdot y'$, se derivan las funciones de implicación equivalencia. Si bien las indisitinguibilidades son un claro ejemplo de funciones de equivalencia, éstas no son las únicas expresiones de las mismas, pero la ausencia de monotonías en su modelo dificulta enormemente el estudio y caracterización de este tipo de funciones por lo que se hace necesario el estudio individual en casi todos los casos.

La última de las implicaciones booleanas que verifica las condiciones frontera necesarias genera un tipo de funciones de implicación, llamadas de proyección, que como su propio nombre indica dependen únicamente de la segunda variable.

Como problemas abiertos se pueden destacar la búsqueda de una caracterización completa de las funciones de implicación materiales no continuas, así como la obtención de una nueva versión del teorema de caracterización que no exija que la función de implicación producto sea estrictamente creciente en $y = 1$, o bien obtener un contraejemplo que demuestre la necesidad de dicha exigencia. En segundo lugar habría que destacar que la formulación de teoremas de caracterización para las funciones de implicación equivalencia queda tambien como problema abierto, pudiéndose llegar a modificar los axiomas de definición para facilitar el trabajo con las mismas.

Capítulo 3: Funciones de implicación y condicionalidad

En el estudio de las desigualdades tanto del Modus Ponens como del Modus Tollens, se obtienen diversos resultados para las distintas tipos de funciones de implicación material. En particular, las R-implicaciones son T-condicionales para toda t-norma T menor o igual que la t-norma generadora de la R-implicación, condición que es suficiente y necesaria. En el caso de las S-implicaciones, los QM-operadores y los operadores materiales extendidos son T-condicionales si la t-norma pertenece a la familia de Łukasiewicz ($T = W_\varphi$) y la negación es menor o igual que la generada por φ ($N \leq N_\varphi$), si bien esta condición es únicamente necesaria, se han encontrado también condiciones de suficiencia para alguno de los operadores citados. En relación con la implicación exponencial se llega a que no es $Prod_\varphi$-condicional para aquellos automorfismos de orden φ tales que $\varphi(x \cdot y) \leq \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, sin embargo, para $T = W_\varphi$, donde $\varphi(x) = x^\alpha$, $\alpha \geq 1$, entonces la implicación exponencial sí es T-condicional. Para la verificación de la desigualdad del Modus Tollens es condición necesaria que la t-norma considerada sea de la familia de Łukasiewicz ($T = W_\varphi$) y que la negación sea menor o igual que la generada por φ ($N \leq N_\varphi$) para toda función de implicación material, no obstante, dicha condición es también suficiente para las R-implicaciones. En el caso de las S-implicaciones, los QM-operadores y los operadores materiales extendidos la condición de suficiencia solo se verifica si la t-conorma a partir de la que se construyen sea tal que $S \leq W_\varphi^*$.

La caracterización de la verificación de las desigualdades tanto del Modus Ponens como del Modus Tollens para las funciones de implicación producto es sencilla. De hecho se prueba que cualquier función de implicación producto verifica la desigualdad del Modus Ponens para cualquier t-norma, mientras que verifican la desigualdad del Modus Tollens si y sólo si la t-norma considerada es de la familia de Łukasiewicz ($T = W_\varphi$) y la negación es menor o igual que la generada por φ ($N \leq N_\varphi$).

Sin embargo en el caso de las funciones de implicación equivalencia es necesario, al igual que sucede con la caracterización en el capítulo anterior, estudiar la desigualdad del Modus Ponens y del Modus Tollens función a función al no haberse encontrado teoremas de caracterización.

Para finalizar el capítulo, se demuestra que las funciones de implicación proyección verifican la desigualdad del Modus Ponens para cualquier t-norma, si y sólo si el operador J verifica $J(x,y) \leq y$. Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para verificar la desigualdad del Modus Tollens exige que se verifique las siguientes condiciones $T \in \mathcal{F}(W)$ y $N \leq N_\varphi \circ f$ donde $f(y) = J(1,y)$.

Un importante problema que ha quedado abierto es la caracterización completa de la T-condicionalidad y de la MT-condicionalidad de la función exponencial, así como la obtención de teoremas que caractericen la condicionalidad de las funciones de implicación equivalencia, tanto para el Modus Ponens como para el Modus Tollens, puesto que, en principio, son únicamente de aplicación los teoremas de carácter general.

Capítulo 4: Estudio de operadores de implicación

En este último capítulo se ha realizado el estudio de una amplia selección de operadores utilizados frecuentemente en los procesos de inferencia y de control, de cara a clasificarlos dentro de las familias anteriormente descritas. Se ha encontrado que muchos de los operadores habitualmente aceptados como funciones de implicación, no pertencen a ninguna de las citadas familias. Adicionalmente se ha verificado que muchas de las funciones de implicación no son capaces de verificar las desigualdades del Modus Tollens y del Modus Ponens para ninguna t-norma, lo que por tanto no garantiza la salida de un proceso de inferencia. Sin embargo habría que estudiar el comportamiento de dichas funciones tanto para el Modus Tollens como para el Modus Ponens con otro tipo de operadores como podrian ser los operadores de agregación.

Es necesario por tanto, continuar clasificando los operadores que van apareciendo en la literatura para asegurar el uso correcto de los mismos.

Bibliografía

[1] C. Alsina, J.L. Castro y E. Trillas, *On the Characterization of S and R Implications*, VI I.F.S.A. World Congress, São Paulo (Brazil), 1995, Vol.1, pp. 317-319.

[2] C. Alsina, E. Trillas y L.Valverde, *On some logical connectives for fuzzy sets theory*, Journal of Math. Anal. Appl., 93 (1983), pp. 309-325.

[3] W. Bandler y L.J. Kohout, *Fuzzy Power Sets and Fuzzy Implication Operators*, Fuzzy Sets and Systems, 4 (1980), pp. 13-30.

[4] W. Bandler y L.J. Kohout, *Semantics of Implication Operators and Fuzzy Relational Products*, Intern. J. of Man Machine Studies, 12 (1980), pp. 89-116.

[5] R. Bellman y M. Gierz, *On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets*, Information and Science, 5 (1973), pp. 149-156.

[6] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol XXV, New York, 1948.

[7] C. del Campo y E. Trillas, *On Mamdani-Larsen's Type Fuzzy Implications*, Eighth International Conference IPMU'00, Vol. II, pp. 712-716.

[8] Z. Cao y A. Kandel, *Applicability of Some Implication Operators*, Fuzzy Sets and Systems, 31 (1989), pp. 151-186.

[9] Z. Cao, D. Park y A. Kandel, *Investigations on the Applicability of Fuzzy Inference*, Fuzzy Sets and Systems, 49 (1992), pp. 151-169.

[10] O. Cordón, F. Herrera y A. Peregrín, *T-norms vs. implication functions as implication operators in fuzzy control*, Proceedings of the 6th IFSA Congress (1995), Vol. I, pp. 501-504.

[11] O. Cordón, F. Herrera y A. Peregrín, *Applicability of the fuzzy operators in the design of fuzzy logic controllers*, Fuzzy Sets and Systems, 86 (Febrero 1997), pp. 15-41.

[12] O. Cordón, F. Herrera y A. Peregrín, *A study on the use of implication operators extending the boolean conjunction in fuzzy control*, Proceedings of the 7th IFSA Congress (1997), Vol.III, pp. 243-248.

[13] O. Cordón, F. Herrera y A. Peregrín, *A practical study on the implementation of fuzzy logic controllers*, International Journal of Intelligent Control and Systems, 3 (1999), pp. 49-91.

[14] O. Cordón, F. Herrera y A. Peregrín, *Characterization of implication operators in fuzzy rule based systems from basic properties*, Proceedings of the EUSFLAT-ESTYLF Joint Conference (1999), pp. 163-166.

[15] Cordón, F. Herrera y A. Peregrín, *Characterization of implication operators in fuzzy control based on basic properties and defuzzification methods.* Fuzzy Sets and Systems (2002), en vias de publicación.

[16] O. Cordón, F. Herrera y A. Peregrín, *Searching for basic properties obtaining robust implication operators in fuzzy control.* Fuzzy Sets and Systems 111 (2000), pp. 237-251.

[17] D. Dubois y H. Prade, *What are fuzzy rules and how to use them*, Fuzzy Sets and Systems, 84 (1996), pp. 169-185.

[18] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[19] Ch. Dujet and N. Vincent, *Force Implication: A new Approach to Human Reasoning*, Fuzzy Sets and Systems, 69 (1995), pp. 53-63.

[20] M.M. Gupta y J. Qi, *Theory of T-norms and Fuzzy Inference Methods*, Fuzzy Sets and Systems, 40 (1991), pp. 431-450.

[21] M.M. Gupta y J. Qi, *Design of Fuzzy Logic Controlers Based on Generalized T-operators*, Fuzzy Sets and Systems, 40 (1991), pp. 473-489.

[22] S. Gottwald, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Vieweg-Verlag (Wiesbaden), 1993.

[23] H. Hellendoorn, D. Driankov y M. Reinfrank, *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer Verlag, 1993.

[24] M. Kiszka, M. Kochanska y D. Sliwinska, *The Influence of Some Fuzzy Implications Operators on the Accuracy of a Fuzzy Model. Partes I y II*, Fuzzy Sets and Systems, 15 (1985), pp. 111-128, 223-240.

[25] G. J. Klir y B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[26] V. Kreinovich, G.C. Mouzouris y H.T. Nguyen, *Fuzzy Rule-based Modeling as a Universal Approximation Tool*, in "Fuzzy Systems Modeling and Control", H.T. Nguyen y M. Sugeno (eds.), Kluwer, Boston (MA), 1998.

[27] R. Lowen, *Fuzzy Set Theory. Basic Concepts, Techniques and Bibliography*, Kluwer Acemic Publishers, Dordrecht (Holland), 1996.

[28] P. Magrez y P. Smets, *Fuzzy Modus Ponens. a New Model Suitable for Applications in Knowledge-Based Systems*, International Journal of Intelligent Systems, 4 (1989), pp. 181-200.

[29] M. Mizumoto, *Fuzzy Controls under Various Approximate Reasoning Methods*, Preprints of the Second IFSA Congress, 1987, pp. 143-146.

[30] M. Mizumoto, *Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part I: Cases of t-norms, t-conorm and Averaging Operators*, Fuzzy Sets and Systems, 31 (1989), pp. 217-242.

[31] M. Mizumoto y H.J. Zimmerman, *Comparison of Fuzzy Reasoning Methods*, Fuzzy Sets and Systems, 8 (1982), pp. 253-383.

[32] E. Rich y K. Knight, *Artificial Intelligence. Second Edition*, MacGraw-Hill, USA, 1991.

[33] B. Schweizer and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York, 1983.

[34] E. Trillas, *Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos borrosos*, Stochastica, Vol. III, n^o 1 (1979), pp. 47-60.

[35] E. Trillas, *On Logic and Fuzzy Logic*, International Journal of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems, Vol.1, No.2 (1992), pp. 107-137.

[36] E. Trillas y C. Alsina, *Logic: Going farther from Tarski?*, Fuzzy Sets and Systems, 53 (1993), pp. 1-13.

[37] E. Trillas y C. Alsina, *On the Joint Verification of Modus Ponens and Modus Tollens in Fuzzy Logic*, EUSFLAT'01, Leicester (Great Britain), pp. 108-114.

[38] E. Trillas, C. Alsina y J. Jacas, *On Contradiction in Fuzzy Logic*, Soft-computing, 314 (1998), pp. 197-199.

[39] E. Trillas, C. Alsina y J. Jacas, *On Logical Conectives For A Fuzzy Set Theory With Or Without Non-Empty Self-Contradictions*, International Journal of Intelligent Systems, 15, Vol. 3 (2000), pp. 155-164.

[40] E. Trillas y S. Cubillo, *Modus Ponens on Boolean Algebras Revisited*, Mathware & Soft Computing, 3 (1996), pp. 105-112.

[41] E. Trillas, S. Cubillo y C. del Campo, *A Few Remarks on Some T-Conditional Functions*, Sixth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Barcelona, 1997, Vol. 1, pp. 153-156.

[42] E. Trillas, C. del Campo y S. Cubillo, *Nota sobre el concepto de implicación borrosa*, ESTYLF'98, pp. 239-243.

[43] E. Trillas, C. del Campo y S. Cubillo, *When QM-implications are Implication Functions and Conditional Fuzzy Relations?*, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 15 (2000), pp. 647-655.

[44] E. Trillas, A.R. de Soto y S. Cubillo, *On Implication and T-Conditional Functions*, en el libro "*Discovering the World with Fuzzy Logic*", V. Novak e I. Perfilieva (eds.), Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[45] E. Trillas y L. Valverde, *An Inquiry into Indistinguishability Operators*, en el libro "*Aspects of Vagueness*", H.J. Skala, S. Termini y E. Trillas (Eds.), D. Reidel Publishing Company, 1984, pp. 231-256.

[46] E. Trillas y L. Valverde, *On Mode and Implication in Approximate Reasoning*, en el libro "*Approximate Reasoning in Expert Systems*", M.M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler y J.B. Kiszka (eds.), Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1985.

[47] E. Trillas y L. Valverde, *On Implication and Indistinguishability in the Setting of Fuzzy Logic*, en el libro "*Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*", J. Kacpryzk y R. Yager (eds.), Verlag TÜV Rheinland, 1985.

[48] I.B. Türksen, V. Kreinovich y R.R. Yager, *A new class of fuzzy implicaion. Axioms of fuzzy implication revisited*, Fuzzy Sets and Systems, 100 (1998), pp. 267-272.

[49] N. Vincent and Ch. Dujet, *A Suggested Conditional Modus Ponens*, International Journal of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems, Vol. 5, No. 1 (1997), pp. 93-106.

[50] R.R. Yager, *An Approach to Inference in Approximate Reasoning*, International Journal of Man-Machine Studies, 13 (1980), pp. 323-338.

[51] R.R. Yager, *On Global Requirements for Implication Operators in Fuzzy Modus Ponens*, Fuzzy Sets and Systems, 106 (1999), pp.3-10.

[52] L. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8 (1965), pp. 338-353.

[53] L.A. Zadeh, *Similarity Relations and Fuzzy Orderings*, Inf. Sci., 3 (1971), pp. 177-200.